23.01.2023

Група 13

Математика (геометрія)

Урок 20-21

Тема: Перпендикулярність прямої і площини

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Означення. Пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині (рис. 34.4).

Якщо пряма a перпендикулярна до площини α, то записують: $a \perp \alpha$. Також прийнято говорити, що площина α перпендикулярна до прямої a або пряма a та площина α перпендикулярні.

З означення випливає, що коли пряма a перпендикулярна до площини α, то вона перетинає цю площину.

Відрізок називають **перпендикулярним до площини**, якщо він належить прямій, перпендикулярній до цієї площини.

Наприклад, інтуїтивно зрозуміло, що ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 34.5). Довести цей факт нескладно, скориставшись такою теоремою.

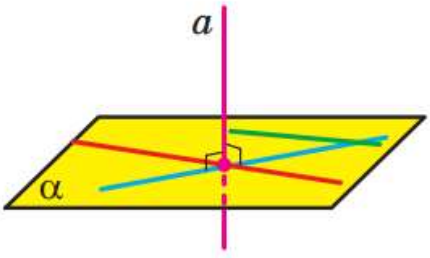


Рис. 34.4

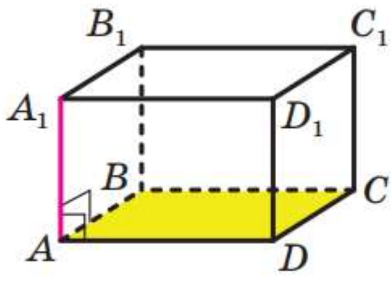
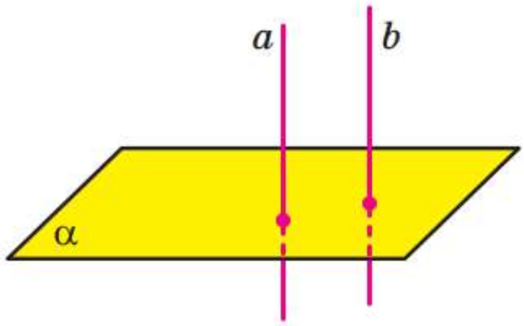


Рис. 34.5

Теорема 34.1 (ознака перпендикулярності прямої та площини). ***Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.***

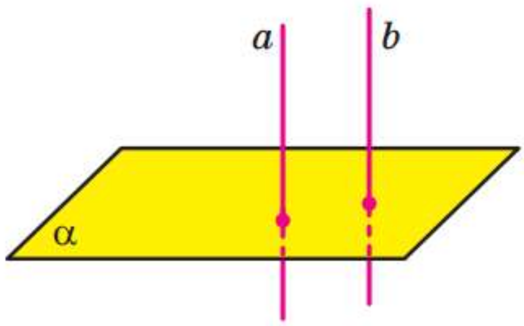
Теорема 34.2. ***Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини*** (рис. 34.7).

Наприклад, на рисунку 34.5 пряма AA_1 перпендикулярна до площини ABC, а пряма CC_1 паралельна прямій AA_1. Отже, за теоремою 34.2 пряма CC_1 також є перпендикулярною до площини ABC.



Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$

Рис. 34.7



Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$

Рис. 34.8

Сформулюємо теорему, що є ознакою паралельності двох прямих.

Теорема 34.3. ***Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні*** (рис. 34.8).

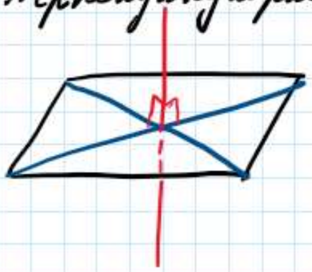
Справедлива й така теорема.

Теорема 34.4. ***Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і до того ж тільки одну.***

34.2.° Пряма m перпендикулярна до прямих a і b площини α. Чи випливає із цього, що пряма m перпендикулярна до площини α?

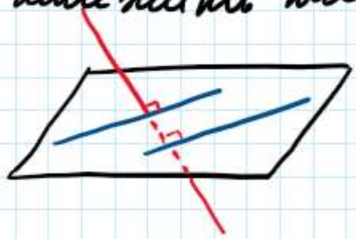
Не завжди.

Перпендикулярна до площини.

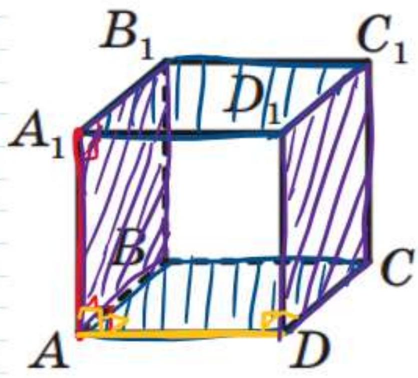


Належить площині.

Не належить площині, але і не перпендикулярна до неї.

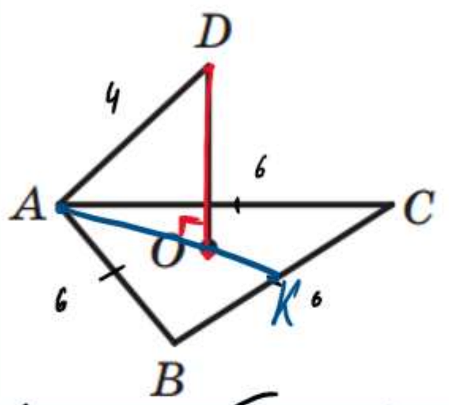


34.4.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 34.10). Назвіть грані куба, до яких перпендикулярна пряма: 1) AA_1; 2) AD.



1) $AA_1 \perp (A_1B_1C_1)$, $AA_1 \perp (ABC)$.
2) $AD \perp (DD_1C_1)$, $AD \perp (AA_1B_1)$.

34.7.° Через центр O правильного трикутника ABC проведено пряму DO, перпендикулярну до площини ABC (рис. 34.11). Знайдіть відрізок DO, якщо $AB = 6$ см, $DA = 4$ см.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = AC = 6$ см, $AD = 4$ см, $DO \perp (ABC)$, O – центр $\triangle ABC$.

Знайти: DO.

Розв'язання

Проведемо $AK \subset ABC$. AK – висота, бісектриса та медіана $\triangle ABC$. З $\triangle AKB$ ($\angle K = 90^\circ$): $AB = 6$ см, $BK = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$ см – за властивістю медіани AK, за теоремою Піфагора:

$AK^2 = AB^2 - BK^2$

$AK^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$

$AK = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$ см

т. O – центр $\triangle ABC$, тоді т. O – точка перетину медіан $\triangle ABC$. Отже $AO : OK = 2 : 1$ за властивістю точки перетину медіан $\triangle$.

Нехай $AO = 2x$ см, $OK = x$ см. Тоді оскільки $\underbrace{AK}_{3\sqrt{3}} = \underbrace{AO}_{2x} + \underbrace{OK}_{x}$, то $2x + x = 3\sqrt{3}$

$3x = 3\sqrt{3}$

$x = \frac{3\sqrt{3}}{3}$

$x = \sqrt{3}$ (см) – OK.

$AO = 2\sqrt{3}$ (см).

З $\triangle AOD$ ($\angle O = 90^\circ$): $AD = 4$ см, $AO = 2\sqrt{3}$ см, тоді за теоремою Піфагора

$OD^2 = AD^2 - AO^2$

$OD^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$OD = \sqrt{4} = 2$ см

Відповідь: $OD = 2$ см.

34.10. Діагональ B_1D прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 17 см, а діагональ AB_1 бічної грані AA_1B_1B дорівнює 15 см (рис. 34.14). Знайдіть ребро AD паралелепіпеда.

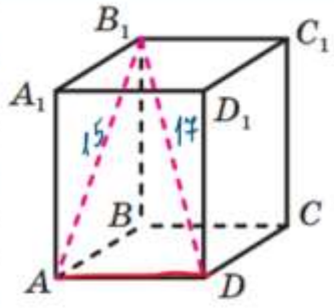


Рис. 34.14

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед,
$AB_1 = 15$ см, $B_1D = 17$ см.
Знайти: AD.

Розв'язання

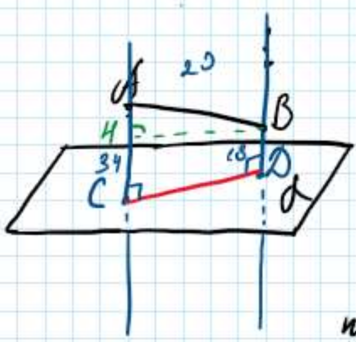
Оскільки $AD \perp AA_1$ і $AD \perp BA$, то $AD \perp (ABB_1)$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини.
Розглянемо $\triangle AB_1D$ ($\angle A = 90°$): за теор. Піфагора $AD^2 = B_1D^2 - AB_1^2$

$AD^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$

$AD = \sqrt{64} = 8$ (см).

Відповідь: $AD = 8$ см.

34.13. Відрізок AB не перетинає площину α. Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть відрізок CD, якщо $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.



Дано: $AB \nparallel \alpha$, $AC \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$,
$AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.

Розв'язання

Проведемо $BH \perp BD$ і $BH \perp AC$.
$CHBD$ – прямокутник. Оскільки $BD = 18$ см, то $CH = BD = 18$ см. Тоді $AH = AC - CH$

$AH = 34 - 18 = 16$ (см).

Розглянемо $\triangle ABH$ ($\angle H = 90°$): за теоремою Піфагора

$BH^2 = AB^2 - AH^2$

$BH^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$

$BH = \sqrt{144} = 12$ (см)

$CD = BH = 12$ см.

Відповідь: $CD = 12$ см.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/rzcZt3ibqVAgNpZJA.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com