

23.03.2023

Група 21

Математика (алгебра)

Урок 11

Тема: Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції

Мета: домогтися засвоєння ознаки сталості функції, достатніх умов зростання та спадання функції; сформуувати вміння застосовувати ці ознаки до розв'язування задач

Матеріали до уроку:

На сьогоднішньому занятті за допомогою похідної будемо визначати проміжки зростання і спадання функції.

Відомо, що функція $y = f(x)$ називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 , що належать проміжку, із умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$.

Дотична в кожній точці графіка зростаючої функції, як видно з даного рисунку, утворює з додатним напрямом осі Ox або гострий кут, або кут, що дорівнює нулю (в останньому випадку дотична паралельна осі Ox).

Виходячи із геометричного змісту похідної: $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, це означає, що похідна в кожній точці проміжку невід'ємна, тому для

зростаючої функції $f(x)$ виконується умова: $f'(x) \geq 0$.

Функція $y = f(x)$ називається спадною на проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 , що належать цьому проміжку, із умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) < f(x_1)$. Дотична в кожній точці графіка спадної функції (рис. 2) утворює з віссю Ox або тупий кут, або кут, що дорівнює нулю, тому для функції $f(x)$, яка спадає на деякому проміжку, виконується умова $f'(x) < 0$.

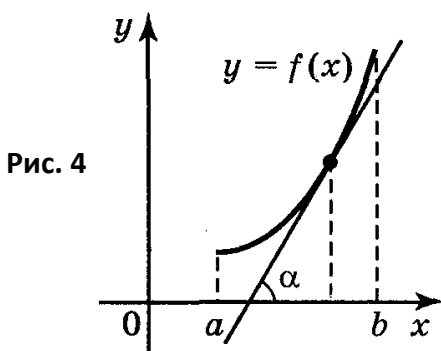
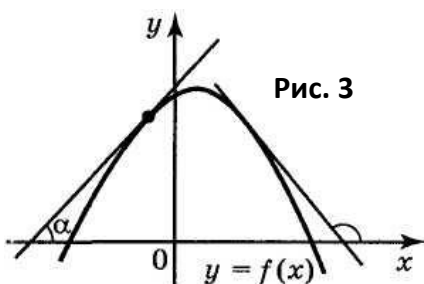
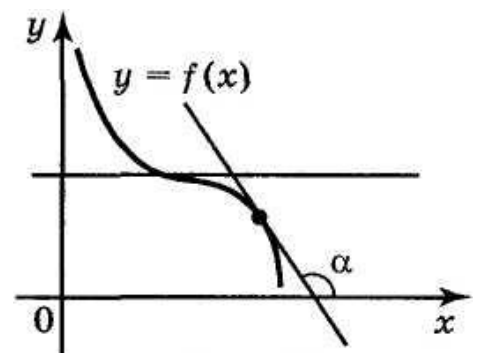
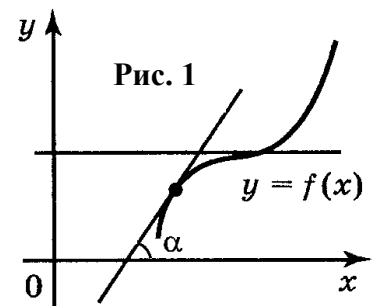
На рис. 3 видно також, що одна і та ж функція може на одному проміжку області її визначення зростати, а на іншому — спадати. Характер поведінки функції на кожному із цих проміжків визначається знаком її похідної.

Отже, наочне уявлення дозволяє спадних функцій.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована і зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не від'ємна

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована і спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не додатна.

Проте для розв'язування задач особливо важливими є обернені твердження, які виражають ознаки зростання і спадання функції на проміжку. Нехай значення похідної функції $y = f(x)$ додатні на деякому проміжку, тобто $f'(x) > 0$. Оскільки $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, то із умови $\operatorname{tg} \alpha > 0$



впливає, що дотичні, проведені до графіка функції в будь-якій точці цього інтервалу, утворюють гострі кути

з додатним напрямом осі OX . У цьому випадку графік функції «піднімається» на заданому проміжку, тобто функція зростає (рис. 4).

Якщо $f'(x) < 0$ на деякому проміжку, то кутовий коефіцієнт дотичної $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ до графіка функції $y = f(x)$ від'ємний. Це означає, що дотична до графіка функції утворює з віссю OX тупий кут і графік функції на цьому проміжку «опускається», тобто функція $f(x)$ спадає (рис. 5).

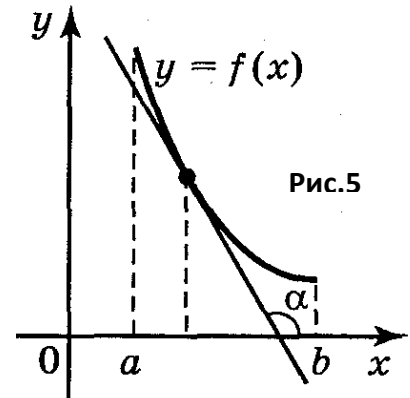


Рис.5

Якщо $f'(x) > 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Якщо $f'(x) < 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку.

Ці два твердження називаються ознаками зростання (спадання) функції на проміжку.

Проміжки зростання і спадання функції часто називають проміжками монотонності цієї функції.

Приклад 1. Доведіть, що функція $f(x) = x + \frac{1}{x}$ зростає на проміжку

$(1; +\infty)$.

Розв'язання

Знайдемо похідну: $f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Якщо $x > 1$, $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$ то тобто $f'(x) > 0$ при $x > 1$, і тому функція зростає на проміжку $(1; +\infty)$.

Знаходження проміжків зростання та спадання функції можна виконувати за таким планом:

Знайти область визначення заданої функції $y = f(x)$.

Знайти похідну $f'(x)$.

3. Розв'язати нерівності

а) $f'(x) > 0$, указати проміжки зростання функції $y = f(x)$;

б) $f'(x) < 0$, указати проміжки спадання функції $y = f(x)$.

Приклад 2. Знайдіть проміжки монотонності функції $y = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання

Область визначення функції: $D(y) = R$.

Знаходимо похідну $y' = 3x^2 - 6x$.

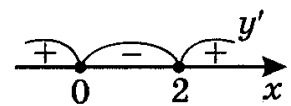
Розв'язуємо нерівності: а) $y' > 0$; б) $y' < 0$. Розв'язуємо ці нерівності методом інтервалів, для цього знаходимо нулі похідної: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, $x = 0$ або $x = 2$. Наносимо на координатну пряму (рис. 6) нулі похідної і визначаємо знаки похідної на кожному проміжку:

$$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 + 6 = 9 > 0;$$

$$y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 < 0;$$

$$y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0.$$

Рис. 6



а) $y' > 0$ в кожному із проміжків $(-\infty; 0)$; $(2; +\infty)$, отже, функція на цих проміжках зростає.

б) $y' < 0$ на проміжку $(0; 2)$, отже, функція на цьому проміжку спадає.

Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty; 0)$; $(2; +\infty)$; спадає на проміжку $(0; 2)$.

Виконання вправ:

Вправа 1

Знайдіть проміжки зростання функції $y = x^2 + 6x + 8$

Розв'язання: на проміжках зростання похідна функції додатна – запам'ятайте це. Знаходимо похідну функції $y' = 2x + 6$ умови рівності нулю визначаємо точку локального екстремуму $2x + 6 = 0$; $x = -6 \div 2 = -3$. В цій точці похідна функції змінює знак, зліва – від'ємна, справа додатна. Функція зростає на інтервалі $x \in (-3; +\infty)$.

Вправа 2

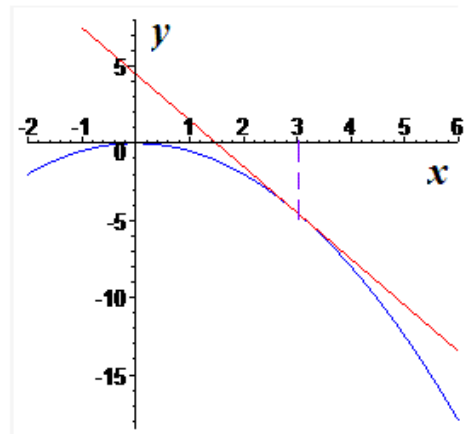
Обчисліть $f'(1)$, якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, і додатним напрямком осі Ox дорівнює 30° .

Розв'язання: геометричний зміст похідної і точки полягає у тому, що вона рівна тангенсу кута нахилу дотичної. Знайдемо тангенс 30° $f'(1) = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вправа 3

До графіка функції $y = -0,5x^2$ проведено дотичну у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Обчисліть тангенс кута нахилу цієї дотичної до додатного напрямку осі абсцис.

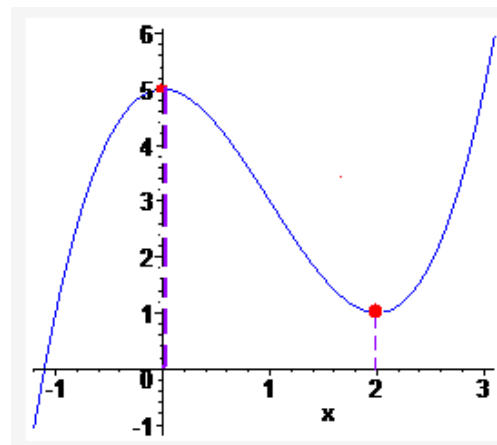
Розв'язання: Обчислимо похідну функції $y' = -0,5 \cdot 2x = -x$. Тангенс рівний похідній в точці дотику $\operatorname{tg}(f) = y'(3) = -3$. Графік функції із дотичною наведено на рисунку



Вправа 4

Знайдіть стаціонарні точки функції $y = x^3 - 3x^2 + 5$

Розв'язання: критичні точки – це нулі похідної функції. Знайдемо похідну $y' = 3x^2 - 6x$ та прирівняємо до нуля $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$; $x = 2$. Графік ілюструє поведінку функції та вигляд біля знайдених точок

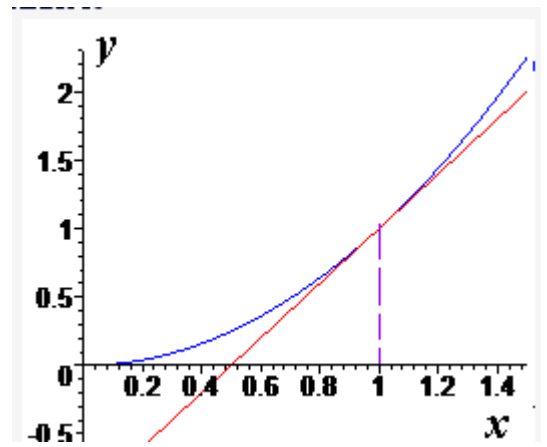


Вправа 5

Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $A(1; 1)$.

Розв'язання: обчислимо значення похідної функції $y^1 = 2x$; $y^1(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Рівняння дотичної складемо за формулу $y = f^1(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$. Графік дотичної до функції наведено нижче

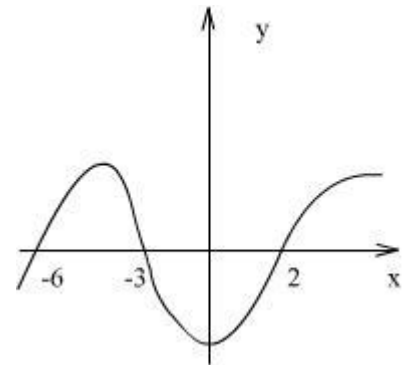


Домашнє завдання:

- Зробити конспект

- Тести для самоконтролю

1. Функція $y=f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік її похідної $y=f'(x)$. Визначте проміжки зростання функції $y=f(x)$.



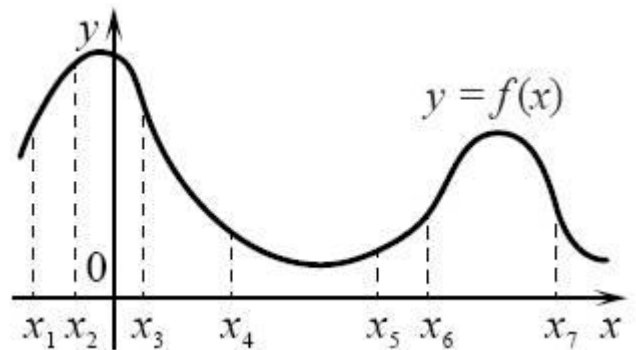
А $[-3; 2]$

Б визначити не можна

В $(-\infty; -4]$ і $[0; +\infty)$

Г $[-6; -3]$ і $[2; +\infty)$

2. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$. Користуючись графіком, порівняти $f(x_3)$ і $f(x_6)$.



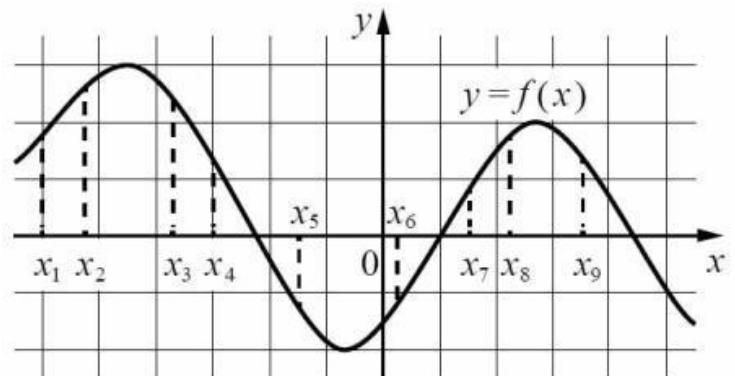
А порівняти неможливо

Б $f(x_3) < f(x_6)$

В $f(x_3) > f(x_6)$

Г $f(x_3) = f(x_6)$

3. Скільки критичних точок на проміжку $[x_1; x_9]$ має функція, графік якої зображено на рисунку?



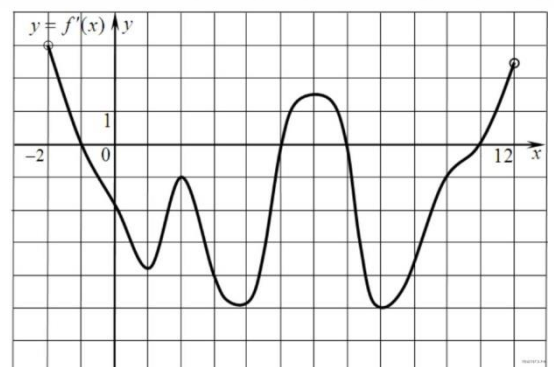
А 9

Б 8

В 7

Г 3

4. На рисунку зображено графік похідної функції $y=f'(x)$, визначеної на проміжку $[-2; 12]$. Скільки проміжків спадання має функція?



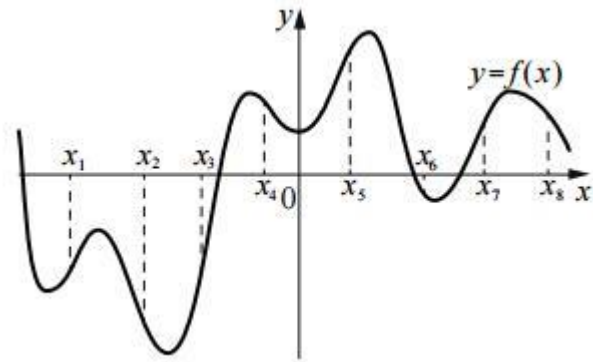
А не можна визначити

Б 2

В 1

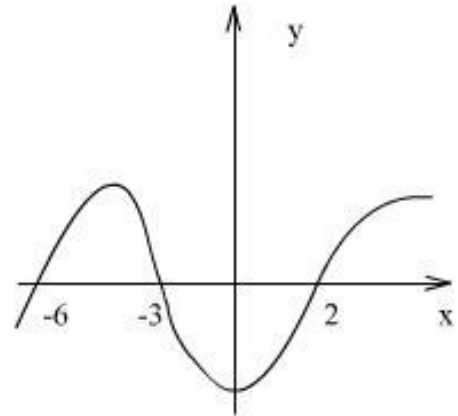
Г 3

5. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$. Користуючись графіком, порівняти $f'(x_7)$ і $f'(x_8)$.



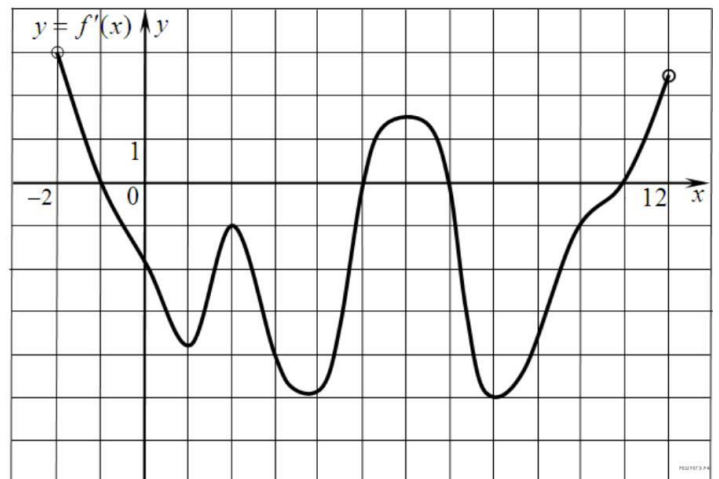
- А $f'(x_7) = f'(x_8)$
- Б $f'(x_7) > f'(x_8)$
- В порівняти неможливо
- Г $f'(x_7) < f'(x_8)$

6. Функція $y=f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік її похідної $y=f'(x)$. Укажіть точки мінімуму функції $y=f(x)$.



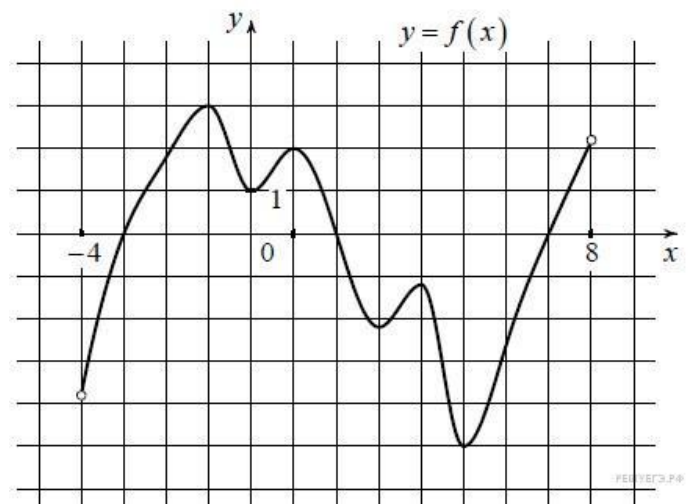
- А 0
- Б -6; -3; 2;
- В -4
- Г -6; 2

7. Функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $[-2; 12]$ і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік її похідної $y=f'(x)$. Скільки точок екстремуму має функція $y=f(x)$?



- А 4 точки
- Б жодної точки
- В 1 точку
- Г 2 точки

8. Функція $y=f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. Скільки точок екстремуму має функція?



- А 4
- Б 3
- В 6
- Г 8

Зворотній зв'язок:

Email: vitasergiivna1992@gmail.com

!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.