24.01.2023

Група 22

Математика (геометрія)

Урок 21-22

Тема: Многогранник та його елементи. Призма

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв’язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами.**

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

Означення. Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

З такими елементами многогранника, як грані, ребра та вершини, ви вже знайомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо у них є спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і A_1B_1BA куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.2) є сусідніми, оскільки ребро A_1B_1 у них спільне.

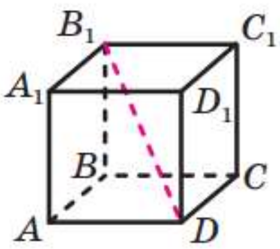


Рис. 16.2

Нехай точка M — вершина многогранника. Кут з вершиною M грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині** M. Наприклад, на рисунку 16.2 кут DAB є плоским кутом куба при вершині A.

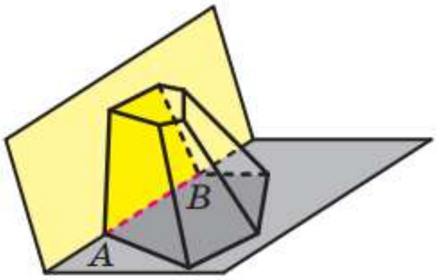


Рис. 16.3

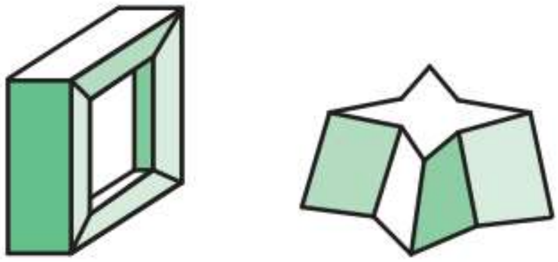


Рис. 16.4

Двогранним кутом многогранника при ребрі AB називають двогранний кут з ребром AB, грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро AB є спільним (рис. 16.3).

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок DB_1 — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.2).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

Означення. Многогранник називають *опуклим*, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 16.4 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками.

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней.

Зупинимося докладніше на вже відомому вам виді многогранника — призмі.

Означення. Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*.

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні n-кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 16.5).

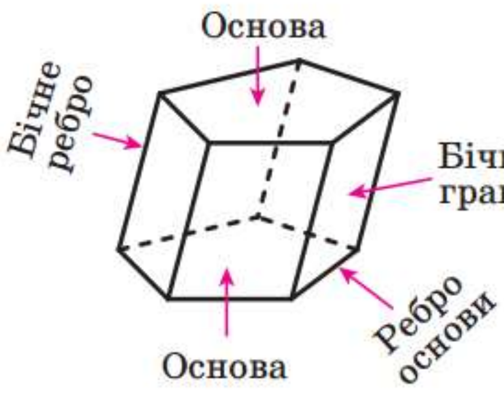


Рис. 16.5

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 16.6). **Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.**

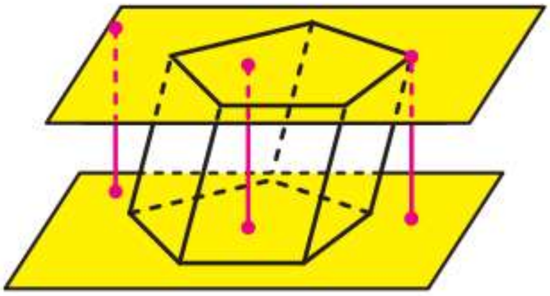


Рис. 16.6

Означення. **Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.**

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

Означення. **Призму називають правильною, якщо вона є прямою та її основа — правильний многокутник.**

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 16.7 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

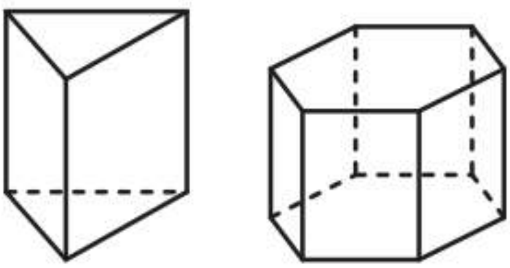


Рис. 16.7

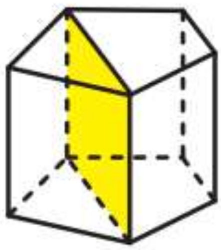


Рис. 16.8

Розглянемо опуклу n-кутну призму ($n > 3$). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 16.8). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми.**

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а прямої призми — прямокутник.

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: **«площа повної поверхні призми»**) називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа поверхні призми, $S_б$ — площа бічної поверхні призми, $S_{осн}$ — площа основи призми.

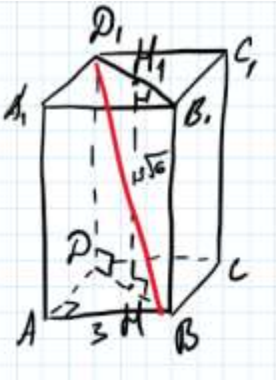
Теорема 16.1. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.***

Результат теореми 16.1 зручно подати у вигляді формули:

$$\boxed{S_б = P_{осн} \cdot b,}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи прямої призми, b — довжина бічного ребра.

16.6.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а висота — $3\sqrt{6}$ см. Знайдіть діагональ призми.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна призма, $AB = BC = CD = AD = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = A_1D_1 =$ $= 3$ см; HH_1 - висота; $HH_1 = 3\sqrt{6}$ см.

Знайти: BD_1.

Розв'язання

$HH_1 = BB_1 = DD_1 = 3\sqrt{6}$ см за властивістю правильної чотирикутної призми.

З $\triangle ABD$ ($\angle A = 90°$): за теоремою Піфагора

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

$BD = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ см $= B_1D_1$.

З $\triangle BDD_1$ ($\angle D = 90°$): за теоремою Піфагора

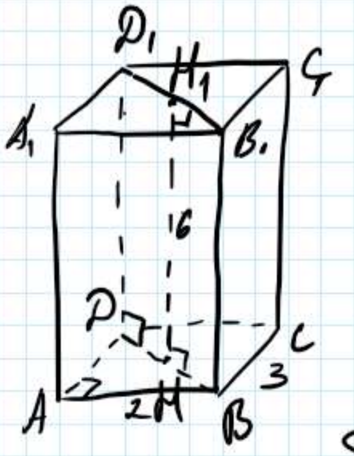
$BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$

$BD_1^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6})^2 = 9 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 18 + 54 = 72$

$BD_1 = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$ см

Відповідь: $BD_1 = 6\sqrt{2}$ см.

16.8.° Знайдіть площу бічної поверхні прямої призми, висота якої дорівнює 6 см, а основою є паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - призма,
HH_1 - висота, $HH_1 = 6$ см,
$ABCD$ - паралелограм, $AB = 2$ см,
$BC = 3$ см.

Знайти: $S_б$.

Розв'язання

$S_б = P_{осн} \cdot AA_1$

$P_{осн.} = 2 \cdot (AB+BC) = 2 \cdot (2+3) = 2 \cdot 5 = 10$ см

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = HH_1 = 6$ см.

$S_б = 10 \cdot 6 = 60$ (см²).

Відповідь: $S_б = 60$ см².

16.13.• Точки D і E — середини ребер AC і BC правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 16.11). Площина, яка проходить через пряму DE та утворює з площиною ABC кут 30°, перетинає ребро CC_1 у точці F. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

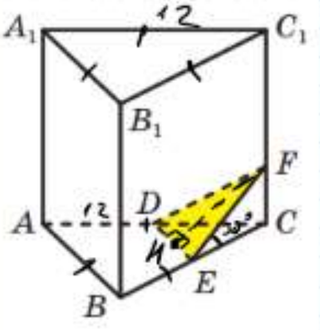


Рис. 16.11

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильна призма, E – середина BC, D – середина AC, $\angle FEC = 30°$, $AB = BC = AC = A_1B_1 =$
$= B_1C_1 = A_1C_1 = 12$ см.

Знайти: S_{DFE}.

Розв'язання

$CE = BE = DC = AD = \frac{12}{2} = 6$ см – за вл. середин сторони.

З ΔECF ($\angle C = 90°$): $FE = \frac{EC}{\cos\angle E}$

$FE = \frac{6}{\cos 30°}$

$FE = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\cancel{12}^{4}\sqrt{3}}{\cancel{3}_{1}} = 4\sqrt{3}$ (см) $=$
$= DF$.

DE – середня лінія ΔABC.

$DE = \frac{AB}{2}$

$DE = \frac{12}{2} = 6$ (см).

FH – висота ΔDFE. З ΔDFE: $DH = HE = \frac{6}{2} = 3$ (см)

За теоремою Піфагора $FH^2 = FE^2 - DH^2$

$FH^2 = (4\sqrt{3})^2 - 3^2 = 16 \cdot 3 - 9 =$
$= 39$

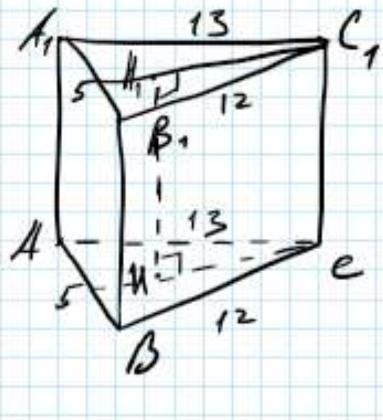
$FH = \sqrt{39}$ см

$S_{\Delta DFE} = \frac{1}{2} DE \cdot FH$

$S_{\Delta DFE} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{3} \cdot \sqrt{39} = 3\sqrt{39}$ (см²).

Відповідь: $S_{DFE} = 3\sqrt{39}$ см².

16.19.* Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см, а площа повної поверхні — 270 см². Знайдіть висоту призми.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – пряма трикутна призма; $AB = A_1B_1 = 5$ см, $BC = B_1C_1 = 12$ см, $AC = A_1C_1 = 13$ см, $S_п = 270$ см^2; HH_1 – висота.

Знайти: HH_1.

Розв'язання

$S_п = S_б + 2S_{осн}$

$S_{осн} = S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$

$p = \frac{P}{2} = \frac{AB+BC+AC}{2}$

$p = \frac{5+12+13}{2} = \frac{30}{2} = 15$ см

$S_{ABC} = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} =$

$= \sqrt{900} = 30$ (см^2) $= S_{осн}$

$S_б = S_п - 2S_{осн}$

$S_б = 270 - 2 \cdot 30 = 270 - 60 = 210$ (см^2).

$S_б = P_{осн} \cdot AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{S_б}{P_{осн}}$

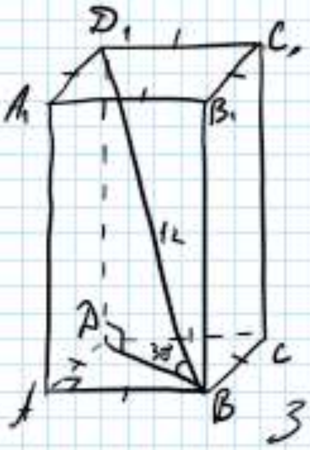
$P_{осн} = AB + BC + AC$

$P_{осн} = 5 + 12 + 13 = 30$ (см).

$AA_1 = \frac{210}{30} = 7$ (см) $= HH_1$.

Відповідь: $HH_1 = 7$ см.

16.21.• Обчисліть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 30°.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма, BD_1 – діагональ, $BD_1 = 12$ см, $\angle D_1BD = 30°$, $AB = BC = CD = AD = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = A_1D_1$.

Знайти: $S_б$.

Розв'язання

З $\triangle BD_1D$ ($\angle D = 90°$): $DD_1 = \frac{BD_1}{2}$

$DD_1 = \frac{12}{2} = 6$ (см) – за вл. катета навпроти кута $30°$.

За теоремою Піфагора:

$BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2$

$BD^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$

$BD = \sqrt{108} = \sqrt{9 \cdot 12} = 3\sqrt{12} = 3\sqrt{4 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$ (см).

З $\triangle ADB$ ($\angle A = 90°$): $AB = AD = x$ см, за теоремою Піфагора $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$x^2 + x^2 = (6\sqrt{3})^2$

$2x^2 = 36 \cdot 3$

$2x^2 = 108$

$x^2 = \frac{108}{2}$

$x^2 = 54$

$x = \sqrt{54}$

$x = \sqrt{9 \cdot 6}$

$x = 3\sqrt{6}$ (см) – $AB = AD$.

$S_б = P_{осн} \cdot DD_1$

$P_{осн} = 4AB = 4 \cdot 3\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$ (см)

$S_б = 12\sqrt{6} \cdot 6 = 72\sqrt{6}$ (см²).

Відповідь: $S_б = 72\sqrt{6}$ см².

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/3SbidWfMnYBN33rZ6.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com