24.01.2023

Група 24

Математика (алгебра)

Урок 11-12

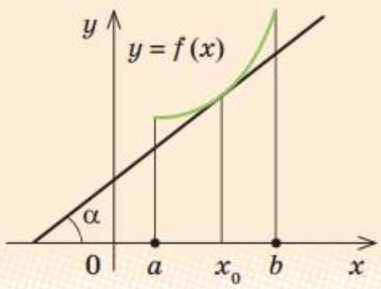
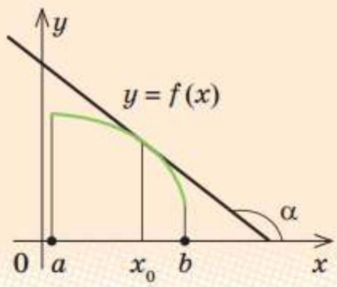
Тема: Критичні точки. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції

Мета:

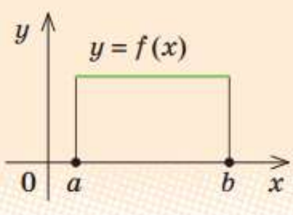
- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв’язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

1. Монотонність і сталість функції

Достатня умова зростання функції	Достатня умова спадання функції
	
$0° < \alpha < 90°$ $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$	$90° < \alpha < 180°$ $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$
Якщо в кожній точці інтервалу $(a;b)$ $f'(x)>0$, **то функція** $f(x)$ **зростає** на цьому інтервалі	Якщо в кожній точці інтервалу $(a;b)$ $f'(x)<0$, **то функція** $f(x)$ **спадає** на цьому інтервалі

Необхідна і достатня умова сталості функції

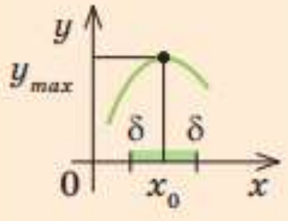


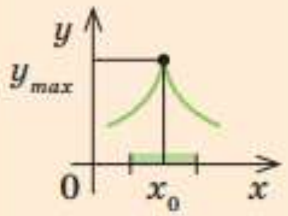
Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x)=0$ в усіх точках цього інтервалу

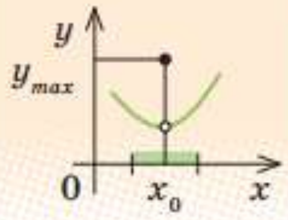
2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

Точки максимуму

Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають ***точкою максимуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.



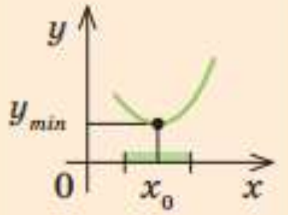


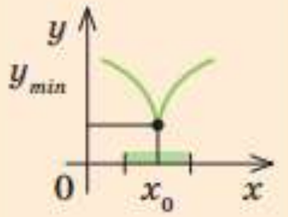


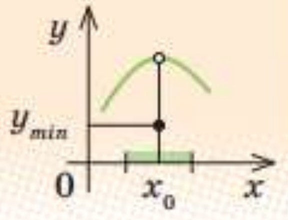
$x_{\max} = x_0$ — *точка максимуму*

Точки мінімуму

Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають ***точкою мінімуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.







$x_{\min} = x_0$ — *точка мінімуму*

Точки максимуму і мінімуму називають *точками екстремуму.*

Значення функції в точках максимуму і мінімуму називають екстремумами функції (максимумом і мінімумом функції).

$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0)$ — *максимум*	$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0)$ — *мінімум*

3. Критичні точки

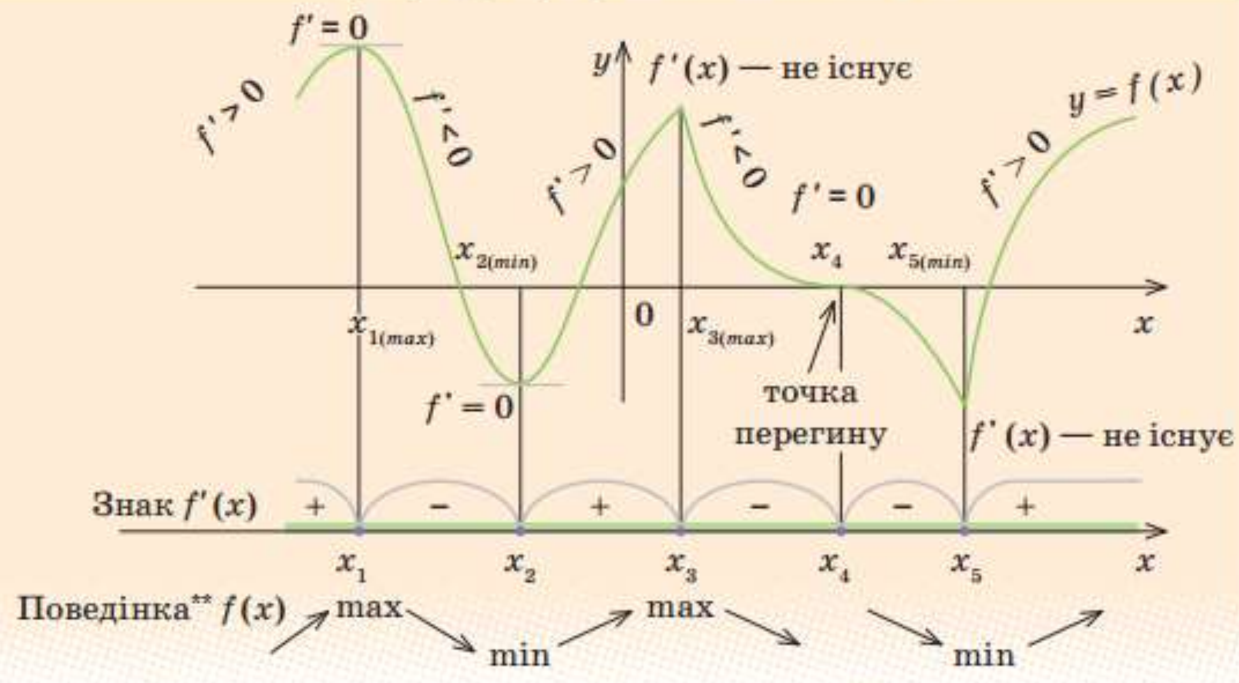
Означення	Приклад
Критичними точками функції **називають внутрішні точки її області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю* або не існує**	$f(x) = x^3 - 12x$ $(D(f) = \boldsymbol{R})$. $f'(x) = 3x^2 - 12$ — існує на всій області визначення. $f'(x) = 0$ при $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ — критичні точки

* Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю, називають також стаціонарними точками.

4. Необхідна і достатня умови екстремуму

Необхідна умова екстремуму	Достатня умова екстремуму
У точках екстремуму похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує (але не в кожній точці x_0, де $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує, буде екстремум)	*Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході* через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$*
x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$ $\Downarrow$ $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ — не існує	У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «–» $\Rightarrow$ x_0 — точка максимуму У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «–» на «+» $\Rightarrow$ x_0 — точка мінімуму

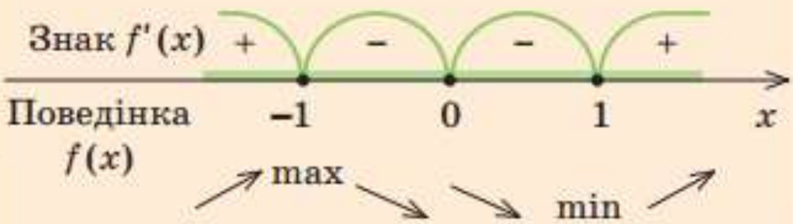
5. Приклад графіка функції $y=f(x)$, що має екстремуми (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критичні точки)



* Мається на увазі перехід через точку x_0 при русі зліва направо.

** Знаком «↗» позначено зростання функції, а знаком «↘» — її спадання на відповідному проміжку.

6. Дослідження функції $y=f(x)$ на монотонність і екстремуми

Схема	Приклад: $y=f(x)=3x^5-5x^3+1$
1. Знайти область визначення функції.	Область визначення: $D(f)=\boldsymbol{R}$
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)=$ $=15x^2(x-1)(x+1)$
3. Знайти критичні точки, *тобто внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.*	$f'(x)$ існує на всій області визначення. $f'(x)=0$ при $x=0$, $x=1$, $x=-1$.
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.	
5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.	
6. Записати результат дослідження (*проміжки монотонності та екстремуми*).	$f(x)$ зростає на кожному з проміжків: $(-\infty;-1]$ і $[1;+\infty)$*; $f(x)$ спадає на проміжку $[-1;1]$. Точки екстремуму: $x_{\max}=-1;\ x_{\min}=1.$ Екстремуми: $y_{\max}=f(-1)=3;\ y_{\min}=f(1)=-1$

22.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$; 3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$; 4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

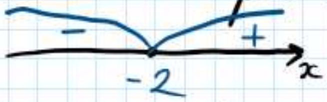
1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$

$f'(x) = 2x + 4$

$2x + 4 = 0$

$2x = -4$

$x = -2$ – критична точка.



Функція ↑ на $[-2; +\infty)$.
Функція ↓ на $(-\infty; -2]$.

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 2\cdot 3x^2 - 3\cdot 2x + 0 = 6x^2 - 6x$

$6x^2 - 6x = 0$

$6x(x-1) = 0$

$6x = 0 \quad x - 1 = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$ – критичні точки.

Функція ↑ на $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.
Функція ↓ на $[0; 1]$.

3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$

$f'(x) = -3x^2 + 18x + 21$

$-3x^2 + 18x + 21 = 0 \quad | : (-3)$

$x^2 - 6x - 7 = 0$

За теор. Вієта:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1 x_2 = -7; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$ критичні точки.

Функція ↑: $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$.
Функція ↓: $[-1; 7]$.

4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$

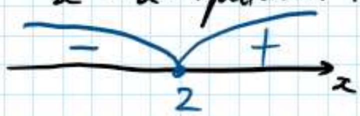
$f'(x) = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} x^3 - 8 = x^3 - 8$

$x^3 - 8 = 0$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8}$

$x = 2$ – критична точка.



Функція ↑: $[2; +\infty)$.
Функція ↓: $(-\infty; 2]$.

22.3.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$; 3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$; 5) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;

2) $f(x) = \frac{3x + 5}{2 - x}$; 4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; 6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$

$f'(x) = \cancel{\frac{1}{4}}\cdot\cancel{4}x^3 - \cancel{\frac{1}{3}}\cdot\cancel{3}x^2 - 0 =$

$= x^3 - x^2$

$D(y) = R$

$x^3 - x^2 = 0$

$x^2(x-1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

Функція ↑: $[1; +\infty)$.

Функція ↓: $(-\infty; 1]$.

2) $f(x) = \frac{3x+5}{2-x}$

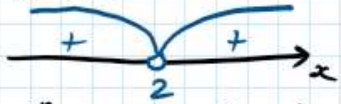
$f'(x) = \frac{3(2-x) - (-1)(3x+5)}{(2-x)^2} =$

$= \frac{6 - \cancel{3x} + \cancel{3x} + 5}{(2-x)^2} = \frac{11}{(2-x)^2}$

$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

$x \neq 2$

$\frac{11}{(2-x)^2} \neq 0$



Функція ↑: $(-\infty; 2) \cup$
$\cup (2; +\infty)$.

Функція ↓: немає.

3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + 2x^{-1}$

$f'(x) = 2x - 1\cdot 2x = 2x - 2x^{-2} = 2x - \frac{2}{x^2}$.

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. $x \neq 0$

$2x - \frac{2}{x^2} = 0 \quad | \times x^2$

$2x^3 - 2 = 0$

$2x^3 = 2$

$x^3 = 1$

$x = 1$

Функція ↑: $[1; +\infty)$.

Функція ↓: $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

4) $f(x) = x + \frac{9}{x} = x + 9x^{-1}$

$f'(x) = 1 + (-1)\cdot 9 \cdot x^{-2} =$

$= 1 - \frac{9}{x^2} \quad x \neq 0$

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

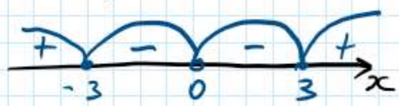
$1 - \frac{9}{x^2} = 0$

$-\frac{9}{x^2} = -1 \quad | \times (x^2)$

$-9 = -x^2$

$x^2 = 9$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$



Функція ↑: $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Функція ↓: $[-3; 0) \cup (0; 3]$.

5) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x+2) - 1\cdot(x^2-3)}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$

$(x+2)^2 \neq 0 \quad x+2 \neq 0 \quad x \neq -2$

$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$

$\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = 0 \quad | \times (x+2)^2$

$x^2+4x+3=0$

За теор. Вієта:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4; \\ x_1 x_2 = 3. \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{array}$

$+ \quad - \quad - \quad +$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad x$

Функція $\uparrow$: $(-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

Функція $\downarrow$: $[-3; -2) \cup (-2; -1]$.

23.1.° На рисунку 23.9 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-10; 9]$. Укажіть:

1) точки мінімуму;

2) точки максимуму.

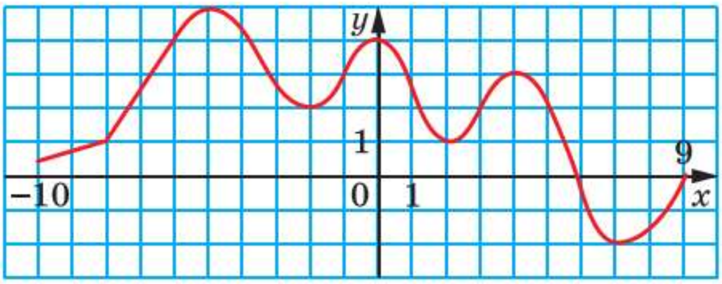


Рис. 23.9

1) $x_{min} = -10; -2; 2; 7.$

2) $x_{max} = -5; 0; 4; 9.$

23.3.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;

2) $f(x) = x^2 - 6x$;

3) $f(x) = 12x - x^3$;

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$.

№23.3

1) $f(x) = 0,5x^4$

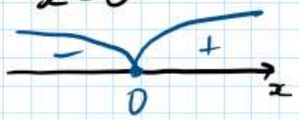
$f'(x) = 0,5 \cdot 4x^3 = 2x^3$

$D(y) = R$

$2x^3 = 0$

$x^3 = 0$

$x = 0$



$x_{min} = 0$

x_{max} = немає

2) $f(x) = x^2 - 6x$

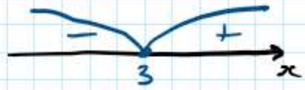
$f'(x) = 2x - 6$

$D(y) = R$

$2x - 6 = 0$

$2x = 6$

$x = 3$



$x_{min} = 3$

x_{max} = немає

3) $f(x) = 12x - x^3$

$f'(x) = 12 - 3x^2$

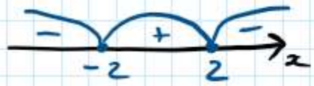
$D(y) = R$

$12 - 3x^2 = 0$

$-3x^2 = -12$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$



$x_{min} = -2$

$x_{max} = 2$

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$D(y) = R$

$3x^2 - 12x - 15 = 0 \quad |:3$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

За теор. Вієта:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 x_2 = -5; \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{vmatrix}$

$x_{min} = 5$

$x_{max} = -1$

23.7.[••] Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$.

1) $f(x) = x + \frac{4}{x} = x + 4x^{-1}$

$f'(x) = 1 + 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

$x^2 \neq 0 \quad x \neq 0$

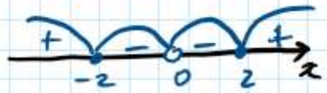
$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$1 - \frac{4}{x^2} = 0 \quad |\times x^2$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$



Функція ↑: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Функція ↓: $[-2; 0) \cup (0; 2]$.

$x_{min} = 2$

$x_{max} = -2$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2+1) - 1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$(x^2+1)^2 \neq 0 \quad x^2+1 \neq 0 \quad x^2 \neq -1$

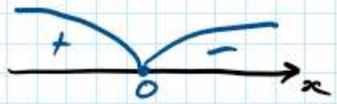
$x \in R$

$D(y) = R$

$-\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \quad | \times (x^2+1)^2$

$-2x = 0$

$x = 0$



Функція ↑: $(-\infty; 0]$.

Функція ↓: $[0; +\infty)$.

x_{min} = немає.

$x_{max} = 0$.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/iCZp7mG4CsYHiXcMA.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com