25.01.2022
Група Е-1
Вища математика
Урок 9
Тема: Розв'язування вправ. Матриці. Визначники

Приклад1: Додати матриці A і B, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1-2 & 3+1 \\ 2+1 & 4-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

дані матриці додати не можна оскільки їх розміри різні, для А—3×2, В—2×3.

Приклад2: Знайти матрицю $C=3A+2B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язуємо: За означенням добутку матриці на число та суми матриць:

$$C=3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 & 7 \\ 13 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Приклад3. Обчислити добуток матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

За означенням:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Приклад 4. Обчислити добуток матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Дані матриці можна перемножити, оскільки число стовпців A дорівнює числу рядків B.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 3+7\cdot 2+(-4)\cdot(-1) \\ 2\cdot 3+5\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Для добутку матриць $A\cdot B\neq B\cdot A$, але $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$, $A\cdot E=A$.

Приклад5. Знайти A^2, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Обчислити матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}$

1. Знаходимо визначник правилом трикутників:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{vmatrix}=1(-1)7+0\cdot 0\cdot 3+2\cdot 2\cdot 3-3(-1)3-0\cdot 2\cdot 7-0\cdot 2\cdot 1=-7+12+9=14$$

$\Delta\neq 0$, отже A^{-1} існує.

2. Обчислюємо алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-7;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-1(-6)=6;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-14;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1$$

Записуємо нову матрицю:

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 6 & 3\\ -14 & -2 & 6\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

3. Транспонуємо одержану матрицю:

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}$$

4. Кожний стовпець одержаної матриці ділимо на *Δ=14*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{14} & \frac{14}{14} & \frac{7}{14}\\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}$$

Приклад7: Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} a & b^2 \\ ab & b^3 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$

Знаходимо за формулою (1)

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - (-5)2 = 3 + 10 = 13$

2) $\begin{vmatrix} a & b^2 \\ ab & b^3 \end{vmatrix} = ab^3 - ab\cdot b^2 = ab^3 - ab^3 = 0$

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha(-\sin\alpha) - \cos\alpha(-\cos\alpha) = -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos 2\alpha$

Приклад8: Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Спосіб 1. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця (метод Крамера).

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (3\cdot 5 - 4\cdot 4) - 2(2\cdot 5 - 3\cdot 4) + 3(2\cdot 4 - 3\cdot 3) =$

$= (15 - 16) - 2(40 - 12) + 3(8 - 9) = -1 + 4 - 3 = 0$

Спосіб 2. За правилом трикутників.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 3 - 4\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 5 = 15 + 24 + 24 -$

$-27 - 16 - 20 = 0$

Домашнє завдання:

Підготуватись до практичної роботи

Зворотній зв`язок:

vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.