25.01.2022
Група М- 1
Вища математика
Урок 3
Тема: практичне заняття 1. Матриці. Дії над матрицями.

Матеріали до уроку:

Транспонуванням матриці називається заміна її рядків на стовпці зі збереженням порядку їх запису. Цю операцію позначають штрихом або буквою *T* у показнику.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \; a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Очевидна рівність $(A^1)=A$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Властивості операції транспортування матриць

1. $\left(A^T\right)^T = A$

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$

3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

4. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Діагональна матриця в результаті транспонування не змінюється.

Дії над матрицями

Додавання матриць.

Додавати можна матриці однакового розміру. Сумою матриць *A* та *B* є матриця *C*, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць *A* і *B*.

Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ то $C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$.

Для операції додавання матриць справедливі сполучний та переставовчий закони.

A+B=B+A

(A+B)+C=A+(B+C)

Приклад: Додати матриці *A* і *B*, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & 3+1 \\ 2+1 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

дані матриці додати не можна оскільки їх розміри різні, для А—3×2, В—2×3.

Віднімання матриць.

Різницею матриць A і B однакового розміру називається матриця C така, що $C+B=A$.

З цього означення випливає, що елементи матриці C дорівнюють різниці відповідних елементів A і B.

$$C=A-B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}:$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Матриці A і B називаються протилежними, якщо їх сума є нульовою матрицею $A+B=0$.

Добуток матриці на число.

Добутком матриці A на число λ називається матриця C, елементи якої дорівнюють добутку числа λ на відповідні елементи матриці A.

$$C=\lambda A=A\lambda$$

Якщо $\lambda=0$, то одержуємо нульову матрицю $A\cdot 0=0$.

Приклад: Знайти матрицю $C=3A+2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язуємо: За означенням добутку матриці на число та суми матриць:

$$C = 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 7 \\ 13 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Добуток матриць.

Нехай дано матрицю A розміром $m\times n$ і B розміром $n\times p$, тоді добутком матриць A і B називається матриця

$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \dots C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} \dots C_{2p} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ C_{m1} & C_{m2} \dots C_{mp} \end{pmatrix}$ розмірності $m\times p$, елементи якої обчислюються за формулою:

$$C_{ij}=a_{i1}\, b_{1j}+a_{i2}\, b_{2j}+\dots+a_{in}\, b_{nj}, \text{ де}$$
$$i=1, 2, 3, \dots, m;\ j=1, 2, 3, \dots, p.$$

Отже для того, щоб дістати елемент, який стоїть на перетині i-того рядка та j-того стовпця матриці добутку, треба всі елементи i-того рядка (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3},

..., a_{in}) матриці A помножити на відповідні елементи j-го стовпця (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}) матриці B і отримані добутки додати.

Приклад: 1. Обчислити добуток матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$$

За означенням:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$$

2. Обчислити добуток матриць:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

Дані матриці можна перемножити, оскільки число стовпців A дорівнює числу рядків B.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 7 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 3+7\cdot 2+(-4)\cdot(-1)\\ 2\cdot 3+5\cdot 2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\ 15\end{pmatrix}$$

Для добутку матриць $A\cdot B\neq B\cdot A$, але $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$, $A\cdot E=A$.

<u>Піднесення матриць до степеня</u>. Операція піднесення до степеня визначена тільки для квадратних матриць.

Цілим додатним степенем $A^n\,(n>1)$ квадратної матриці A називається добуток n матриць, рівних A, тобто

$$A^n=\underbrace{AAA...A}_{n\ разів}$$

Властивості.

1. $A^0=E$
2. $A^1=A$
3. $A^nA^m=A^{n+m}$
4. $(A^n)^m=A^{nm}$

Приклад. Знайти A^2, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}.$$

Зворотній зв`язок:

vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.