25.01.2023
Група М-1
Вища математика
Урок 4
Тема: Визначники II-го та III-го порядків

План

1. *Визначник матриці. Знаходження визначника 2-го порядку.*
2. *Обчислення визначника квадратної матриці третього порядку*
3. *Методи обчислення визначників третього порядку*
4. *Основні властивості визначників*

Визначник матриці.
Обчислення визначників другого і третього порядків.

Визначник (детермінант) матриці позначається *Δ*. *detA=Δ*

Знаходження визначника 2-го порядку.

Розглянемо матрицю другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Визначником другого порядку матриці *A* називається число:

$$delA = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (1)$$

Для обчислення визначника другого порядку треба від добутку елементів головної діагоналі $a_{11}a_{22}$ відняти добуток елементів побічної діагоналі $a_{21}a_{12}$.

Приклад: Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} a & b^2 \\ ab & b^3 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$

Знаходимо за формулою (1)

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-5)2 = 3 + 10 = 13$

2) $\begin{vmatrix} a & b^2 \\ ab & b^3 \end{vmatrix} = ab^3 - ab \cdot b^2 = ab^3 - ab^3 = 0$

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha(-\sin\alpha) - \cos\alpha(-\cos\alpha) = -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos 2\alpha$

Обчислення визначника квадратної матриці третього порядку

Визначником 3-го порядку називається число, що позначається символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Методи обчислення визначників третього порядку

1. Метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) -$$

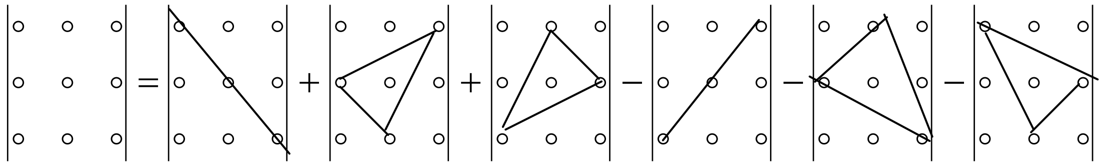
$$- a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

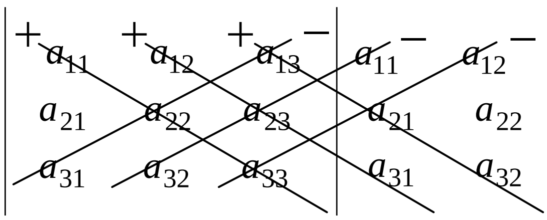
Визначники 2-го порядку, що входять у праву частину рівності, отримуються з даного визначника 3-го порядку ви кресленням першої стрічки та певного стовпчика. Вони називаються *мінорами* визначника, який є зліва в цій рівності.

2. Обчислення правилом трикутників (правило Сарруса).

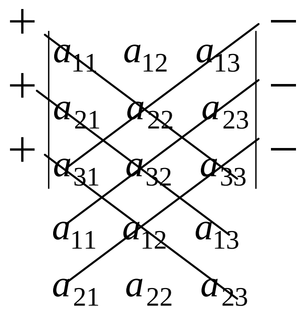
Запишемо схематично:



3. Правило дописування стовпців або рядків.



або



Приклади: Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

1. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця (метод Крамера).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (3\cdot 5 - 4\cdot 4) - 2(2\cdot 5 - 3\cdot 4) + 3(2\cdot 4 - 3\cdot 3) =$$

$$= (15 - 16) - 2(40 - 12) + 3(8 - 9) = -1 + 4 - 3 = 0$$

2. За правилом трикутників (Сарруса).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot5 + 2\cdot4\cdot3 + 2\cdot4\cdot3 - 3\cdot3\cdot3 - 4\cdot4\cdot1 - 2\cdot2\cdot5 = 15 + 24 + 24 -$$

$$-27 - 16 - 20 = 0$$

3. Додавання стовпців.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot5 + 2\cdot4\cdot3 + 3\cdot2\cdot4 - 3\cdot3\cdot3 - 4\cdot4\cdot1 - 5\cdot2\cdot2 = 15 + 24 +$$

$$+24 - 27 - 16 - 20 = 0$$

Основні властивості визначників

1. Визначник не змінюється, якщо в ньому рядки замінити на стовпці, а стовпці на рядки.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Якщо всі елементи деякого рядка дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (або стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

4. Якщо у визначнику два рядки однакові, то визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

5. Якщо всі елементи рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 18 & 3 \\ 10 & 15 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\cdot2\cdot3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 30\cdot6\cdot4 = 720,$$

6. Визначник, у якого елементи двох рядків (стовпців) є відповідно пропорційними. Дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\,a_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0\,; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

7. Якщо дано визначник, в якого всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

8. Якщо до елементів якого-небудь рядка (стовпця) відповідно додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число, то визначник не зміниться.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\cdot 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

При доведені використані властивості *3*, *4* і *6*.

Наслідок. Якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати (відняти) елементи будь-якого іншого рядка-стовпця, то визначник не зміниться.

9. Визначник, у якого всі елементи, що розміщені вище (або нижче) головної діагоналі, є нулі, дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Зворотній зв`язок:
vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.