26.01.2023

Група 32

Математика

Урок 37 **(алгебра)**

Тема уроку: Перестановки, розміщення, комбінації.

Мета: ознайомити учнів з новим матеріалом; закріпити правила суми і добутку; досягти засвоєння основних правил та понять, а саме: правило суми і добутку, поняття факторіалу, розміщення, перестановки, комбінації. Навчати практичному застосуванню набутих знань; розвивати увагу й пам'ять; виховувати зацікавленість предметом.

Матеріали до уроку:

Закріплення матеріалу попереднього уроку:

Правило суми і правило добутку

Спочатку розглянемо правило суми:

якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (причому будь-який вибір елемента A відрізняється від вибору елемента B), то вибрати A або B можна m + n способами.

Приклад 1. В ящику знаходиться 7 білих і 4 чорних кульки. Тоді вибрати одну кульку: білу або чорну можна 7 + 4 = 11 способами.

Зрозуміло, що правило суми можна розповсюдити на три і більше елементів.

Сформулюємо правило добутку:

якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент B можна вибрати (незалежно від вибору елемента A) — n способами, то пару об’єктів A і B можна вибрати mn способами.

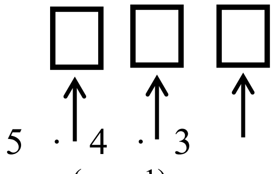
Приклад 2. У шкільній їдальні є вибір з 3 перших і 5 других блюд. Тоді обід з першого і другого блюда можна обрати 3 · 5 = 15 способами.

Правило добутку розповсюджується на три і більше елементів.

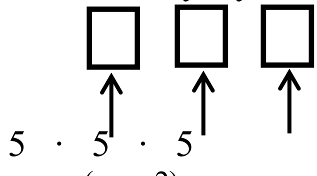
Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1;2;3;4;5, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються.

Розв’язання.

1) Маємо 5 способів для сотень числа (мал. 1). Після того, як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 4 способи. Міркуючи далі, для одиниць - 3 способи. Отже, маємо: «5 способів, і після кожного з них — 4, і після кожного з них — 3 способи». За правилом добутку маємо 5 · 4 · 3 = 60 чисел.



(мал. 1)



(мал. 2)

2) Якщо цифри у числі повторюються, то на кожне з трьох місць є по 5 варіантів заповнення (мал. 2), і тоді всіх чисел буде 5 · 5 · 5 = 125.

1. Поняття факторіалу.

Означення. Факторіалом числа n, де n — ціле невід’ємне число називають добуток всіх натуральних чисел від 1 до n.

Позначають це так n! Отже, n! = 1 · 2 · 3 ·...· (n - 1) · n. За означенням приймають 0! = 1.

1! = 1

2! = 1 · 2 = 2

3! = 1 · 2 · 3 = 6

4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24.

Приклад 5. Спростити вираз 6!/5!.

Розв'язання.

Маємо

2. Розміщення.

Нехай дано множину X з n елементів $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Означення. Розміщенням з n елементів по k (k<n) називають будь-яку впорядковану підмножину У множини X, причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом або порядком елементів.

Для позначення цього числа застосовується спеціальний символ A_n^k (читається: «число розміщень із n по k » або « A із n по k». A – перша буква французького слова «arrangement», що означає «розміщення, приведення у порядок».

Використовуючи позначення факторіала, формулу записують у вигляді: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Приклад 6. Нехай дано множину X = {1;2;3}. Тоді по одному можна скласти такі розміщення:

(1), (2), (3) - їх буде 3;

по два можна скласти такі розміщення:

(1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2) - їх буде 6;

по три можна скласти такі розміщення:

(1;2;3), (1;3;2), (2;1;3), (2;3;1), (3;1;2), (3;2;1) - їх буде 6.

Кількість розміщень можна записати $A_3^1 = 3;\ A_3^2 = 6;\ A_3^3 = 6.$

Приклад 7. Розклад на день містить 6 уроків. Визначити кількість всіх можливих розкладів при виборі з 9 предметів, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі.

Розв'язання. Зрозуміло, що таких розкладів буде

$$A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 60480$$

Приклад 8. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19, які використовують для запису чисельника і знаменника дробу?

Розв'язання. Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику можна скласти $A^2{}_8$ штук, але лише половина з них правильні. Отже, шукана кількість дробів $\frac{1}{2} \cdot A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8!}{6!} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$

3. Перестановки.

Означення. Будь-яка впорядкована множина, яка складається з заданих n-елементів, називається ***перестановкою із n-елементів***.

Число перестановок із n-елементів позначають через P_n. P – перша буква французького слова «permutation» -- «перестановки».

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n. З означення випливає, що $P_n = A_n^k$. Тоді враховуючи формулу для A_n^k та 0! = 1, маємо:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Отже, $P_n = n!$

Приклад 9. Скількома способами можна розставити на полиці 6 книжок?

Розв’язання. Очевидно, що шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 6 елементів (книг): $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Приклад 10. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0; 1; 2; 3, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

Розв’язання. З чотирьох цифр 0; 1; 2; 3 можна утворити P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з 0 не будуть записами чотирицифрових чисел, таких перестановок — P_3. Отже, шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 3!(4 - 1) = 6 \cdot 3 = 18$.

4. Комбінації (сполучення).

Нехай дано множину X з елементів $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

<u>*Означення.*</u> Комбінацією (сполученням) з n елементів по k ($k \le n$) називають будь-яку під множину Y множини X; причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом.

Число всіх комбінацій з n–елементів по k–елементів позначається символом C_n^k (читається: «число комбінацій із n по k» або «це із n по k»)

C – перша буква французького слова «combinasion» «комбінація».

У загальному випадку число комбінацій із n-елементів визначається такою формулою: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Наприклад, $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

Приклад 11. У вазі 6 червоних і 4 білих троянди. Скількома способами з вази можна вибрати: 1) три троянди; 2) дві червоні і одну білу троянду?

Розв’язання. 1) Оскільки порядок вибору не має значення, то вибрати три троянди з 10 можна C^3_{10} способами.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$ (способів)

2) Дві червоні троянди можна вибрати C^2_6 способами, а одну білу – C^1_4 способами. Тому вибрати дві червоні і одну білу троянди можна способами. Маємо

$$C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{3! \cdot 4}{3!} = 15 \cdot 4 = 60$$ (способів)

Властивості комбінацій:

1. $C_m^n = C_m^{m-n}$
2. $C_m^{n+1} = C_m^n * \frac{m-n}{n+1}$
3. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$
4. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m$

Якщо в комбінаторній задачі необхідно вибрати k елементів з n, то важливим є питання – необхідно враховувати порядок слідування елементів чи ні. Від цього залежить яку формулу (комбінаторну схему) необхідно використовувати:
якщо порядок має значення, то використовуємо A_n^k, якщо ні — то C_n^k.

Пропонується наступна задача-схема.

<table>
<tr><td colspan="2">В класі 20 учнів. Скількома способами з цього класу можна вибрати...</td></tr>
<tr><td>старосту й його заступника</td><td>двох чергових</td></tr>
<tr><td>Обов'язки різні!
Порядок має значення.
$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 19 \cdot 20 = 380$</td><td>Обов'язки однакові!
Порядок не має значення.
$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$</td></tr>
</table>

Домашнє завдання:

Розв'язати наступні задачі:

1. В магазині є 8 видів цукерок у коробках. Скільки всього можна утворити наборів, кожен з яких складається з трьох видів цукерок?

А	Б	В	Г	Д
336	6	8!	56	112

2. Чемпіонат, в якому беруть участь 18 команд проводиться в два кола (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яка кількість зустрічей має бути проведена.

А	Б	В	Г	Д
288	153	306	18!	612

3. Скільки всього різних п'ятицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 1; 2; 3; 4; 5?

А	Б	В	Г	Д
24	80	100	120	720

4. Скільки всього різних чотирицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 0; 2; 4; 6; 8?

А	Б	В	Г	Д
120	48	96	24	інша відповідь

5. Скільки всього різних перших парних двоцифрових чисел можна утворити із цифр 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 не повторюючи цифр у числах?

А	Б	В	Г	Д
12	18	21	24	42

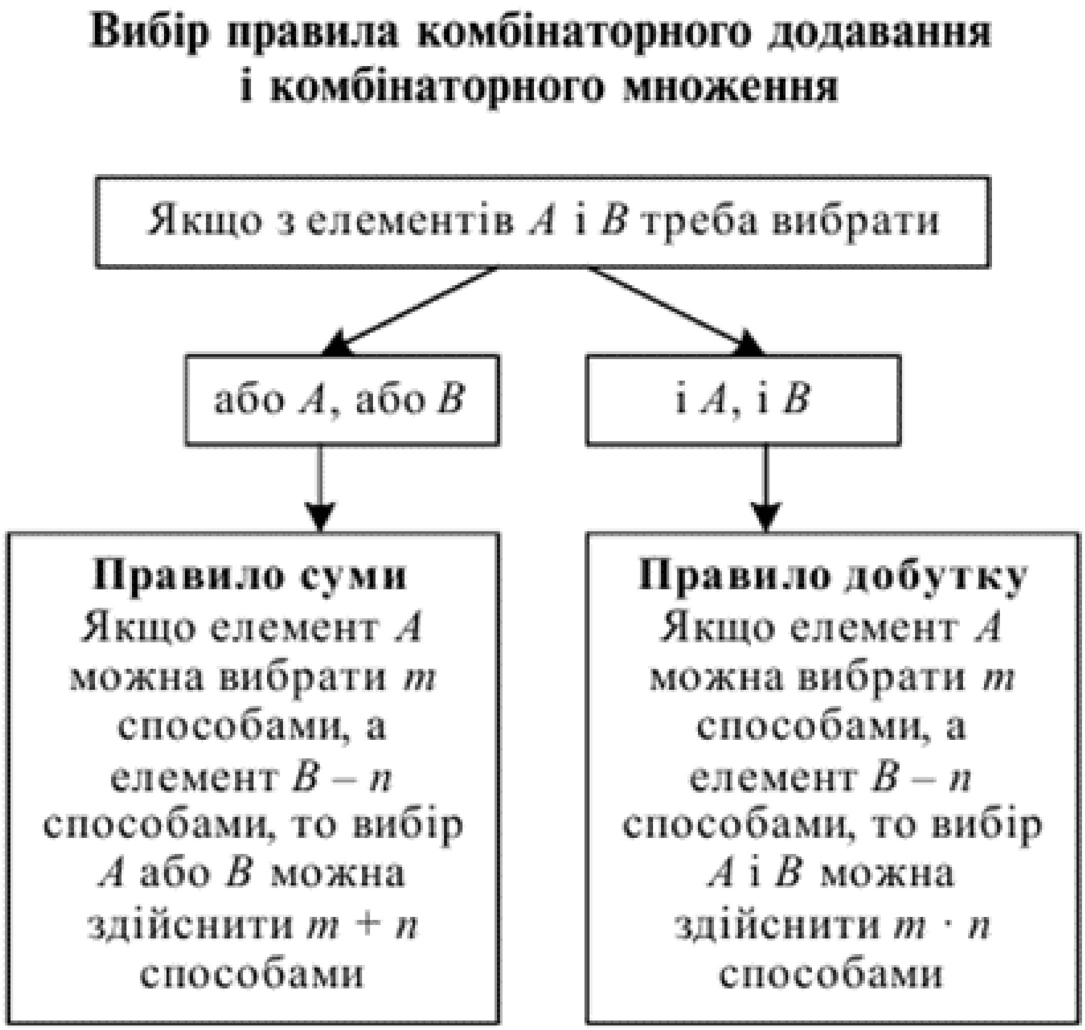
6. Скількома способами можна вибрати 2 олівці і 3 ручки з 5 різних олівців і 6 різних ручок?

А	Б	В	Г	Д
200	120	400	30	180

Зворотній зв'язок
Viber/Telegram 0932186792
E-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.

Додаток 1: вибір правила суми чи добутку



Додаток 2: Вибір розміщення, перестановки чи комбінації