

27.01.2023

Група 33

Математика (алгебра)

Урок 48

Тема: Повторення. Розв'язування тригонометричних рівнянь

Мета: Формування в учнів умінь розв'язувати тригонометричні рівняння способом:

- заміни змінних;
- зведення до однієї тригонометричної функції з однаковим аргументом;
- розкладанням на множники;
- введення допоміжного кута;
- зведення до однорідного рівняння.

Розвивати логічне мислення, уяву, пам'ять, виховувати інтерес до математики, уважність, відповідальність, культуру математичних записів, позитивне ставлення до навчання.

Матеріали до уроку:

Розв'язування рівнянь

Переходимо до пояснення розв'язків складних тригонометричних рівнянь. Тут маємо приклади де аргумент в тригонометричній функції знаходиться під коренем або в квадраті, також рівняння де аргумент або сама функція містяться під модулем. Кожен з прикладів вимагає іншого підходу при зведенні рівнянь до найпростішого типу. Водночас на подібних прикладах Ви швидко навчитесь розписувати складні завдання та знатимете яку зі схем застосовувати.

Приклад 18.13 Розв'язати рівняння $\cos^2(x) + 5\cos(x) - 6 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos 1 + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ $x = \pm(\pi - \arccos 6) +$ $+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

Розв'язання: З вигляду тригонометричного рівняння робимо висновок, що через заміну змінних його слід звести до квадратного рівняння.

Зробимо заміну $\cos(x) = t$, причому змінна має відповідати області визначення косинуса $-1 \leq t \leq 1$.

В такий спосіб прийдемо до квадратного рівняння $t^2 + 5t - 6 = 0$.

За теоремою Вієта знаходимо: $t_1 = 1$ і $t_2 = -6 < -1$ (не задовольняє умові).

Отже, отримали $\cos(x) = 1$, звідси корінь рівний

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: Д.

Приклад 18.15 Розв'язати рівняння $\sin(x^2) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}$	0	$\{0\} \cup \{\sqrt{2\pi n}, n \in \mathbb{N}\}$	$-\sqrt{2\pi n}, n \in \mathbb{N}$	$\{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}\}$

Розв'язання: Аргумент під синусом міститься в другому степені, тому з правої частини потрібно буде знаходити корінь квадратний.

Запишемо розв'язок рівняння

$$\sin x^2 = 0, x^2 = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

звідси $x = \pm\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}$, а також 0, оскільки раніше номер пробігав множину цілих чисел (тепер натуральних).

Остаточо отримаємо множину коренів

$$x = \{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Відповідь: Д.

Приклад 18.18 Розв'язати рівняння $\cos(\cos(x))=1$.

А	Б	В	Г	Д
\emptyset	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos(\cos(2\pi n)) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Маємо косинус від косинуса в лівій частині та одиницю в правій.

Розкриваємо зовнішній косинус

$$\cos(\cos x) = 1, \cos x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Далі виписуємо обмеження на ОДЗ внутрішнього косинуса

$$\begin{cases} 2\pi k > 1 \\ 2\pi k < -1 \end{cases}$$

при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (без нуля).

Потрібних номерів k щоб виконувались нерівності немає, тому розглянемо єдиний випадок:

$$k=0, \text{ тоді } \cos(x)=0, \text{ звідси } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: Б.

Приклад 18.19 Розв'язати рівняння $\sin(x) + \sin(|x|) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	0	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in \mathbb{N}\}$	$(-\infty; 0] \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$

Розв'язання: Маємо тригонометричне рівняння з синусами, один з аргументів в якому взятий по модулю.

Для обчислень замінюємо наведене р-ня системою рівнянь для різних значень аргументу

$$\sin x + \sin |x| = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x + \sin x = 0 & x > 0 \\ \sin x - \sin x = 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Далі рівняння розв'язуємо:

$$\begin{cases} 2\sin x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{N} \\ x \in (-\infty; 0] \end{cases}$$

Сукупність розв'язків заданого рівняння має вигляд:

$$x \in (-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in \mathbb{N}\}$$

Відповідь: Г.

Тригонометричні рівняння з параметром одні з важчих в курсі тригонометрії. При розкритті таких рівнянь потрібно враховувати область допустимих значень тригонометричних функцій, а також застосовувати весь багаж формул, щоб перетворити рівняння до простого типу.

Приклади, що далі наведені входять в збірники з підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Приклад 18.21 За якого найменшого значення параметра a рівняння $2\cos(4x) = a - 5$ має корені?

А	Б	В	Г	Д
-3	0	3	1	-1

Розв'язання: Рівняння з параметрами одні з найважчих, і це стосується не тільки курсу тригонометрії.

Тому їх слід розписувати уважно та враховувати всі можливі обмеження.

$$\text{Запишемо р-ня } 2\cos(4x) = a - 5 \text{ у вигляді } \cos(4x) = (a - 5)/2.$$

Згідно з обмеженнями на область допустимих значень функції косинус, задане тригонометричне рівняння матиме корені, якщо параметр лежатиме в інтервалі

$$-1 \leq \frac{a - 5}{2} \leq 1$$

Розв'яжемо отриману систему нерівностей:

$$-1 \leq \frac{a-5}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq a-5 \leq 2 \rightarrow$$

$$-2+5 \leq a-5+5 \leq 2+5 \rightarrow 3 \leq a \leq 7$$

Отже, при $a[\min]=3$ рівняння $2\cos(4x)=a-5$ має корені.

Відповідь: В.

Приклад 18.22 Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $(a+2)\sin(x)=a^2-4$ має корені.

А	Б	В	Г	Д
$a \in (1;3)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \neq 2$	$a \in \{-2\} \cup [1;3]$	\emptyset

Розв'язання: Розпишемо праву частину рівняння з параметром за формулою різниці квадратів

$$(a+2)\sin x = a^2 - 4 \rightarrow (a+2)\sin x = (a+2)(a-2)$$

Очевидно, що при $a=-2$ рівняння матиме безліч коренів, оскільки маємо тотожність $0=0$.

Розглянемо випадок:

$$\sin(x)=a-2.$$

З обмежень на область допустимих значень функції синус виписуємо умову, що параметр повинен знаходитися в межах $-1 \leq a-2 \leq 1$.

Спростуємо систему нерівностей:

$$-1 \leq a-2 \leq 1 \rightarrow$$

$$-1+2 \leq a-2+2 \leq 1+2 \rightarrow$$

$$1 \leq a \leq 3$$

Отримали, що при $a \in \{-2\} \cup [1;3]$ тригонометричне рівняння $(a+2)\sin(x)=a^2-4$ має корені.

Відповідь: Г.

Домашнє завдання:

Зробити конспект

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.