28.02.2023

Група 15

Математика (алгебра)

Урок 30

Тема: Формули додавання та наслідки з них

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

1. Косинус різниці і суми

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

2. Синус суми і різниці

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

3. Тангенс суми і різниці

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

4. Формули подвійного аргумента

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

5. Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Приклад 1. Обчисліть: 1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 15°$.

Розв'язання

1) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$
$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$
$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

3) $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) =$
$$= \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$
$$= \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$

Коментар

Подамо 15° як різницю:

$15° = 45° - 30°$, а значення тригонометричних функцій кутів 45° і 30° ми знаємо. Тому, записавши синус 15° як синус різниці, одержимо значення $\sin 15°$. Аналогічно знайдемо $\cos 15°$ і $\operatorname{tg} 15°$.

Зауважимо, що для знаходження $\operatorname{tg} 15°$ можна було б використати також формулу $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

У завданні 3 в одержаному виразі $\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$ зручно позбутися ірраціональності в знаменнику дробу, що значно спрощує відповідь.

Приклад 2. Спростіть вираз $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$.

Коментар

У чисельнику і знаменнику дробу використаємо формули косинуса суми і косинуса різниці та зведемо подібні члени.

Розв'язання

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 1$$

Приклад 3. Знайдіть значення виразу $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \sin 23°$.

Розв'язання

$\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \cos 23° =$
$= \cos(37° + 23°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Коментар

Використаємо формулу косинуса суми справа наліво:

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta).$$

Приклад 4. Обчисліть:

1) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 15°\cos 15°$.

Розв'язання

1) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=$

$=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\sin 15°\cos 15°=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 15°\cos 15°=$

$=\frac{1}{2}\sin(2\cdot 15°)=$

$=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$.

Коментар

У першому завданні достатньо «впізнати» праву частину формули косинуса подвійного аргумента і записати результат.

У другому завданні слід звернути увагу на те, що заданий вираз відрізняється від правої частини формули синуса подвійного аргумента тільки відсутністю двійки. Тому, якщо цей вираз помножити і поділити на 2, він не зміниться, але тепер за формулою одержуємо:

$$2\sin 15°\cos 15°=\sin(2\cdot 15°)=\sin(30°)=\frac{1}{2}.$$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/Afu4rQc8pPR8zfjL6.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com