

28.03.2023

Група 35

Математика (геометрія)

Урок 39-40

Тема заняття: Об'єм конуса

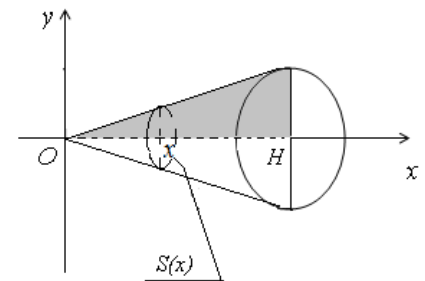
Мета заняття:

- спираючись на знання студентів з попередньо вивчених тем, вивести формулу для знаходження об'єму конуса за площами його поперечних перерізів, розглянути основні випадки застосування вивчених формул, навчити розв'язувати відповідні вправи;
- виховувати свідоме і відповідальне ставлення до навчання, формувати інтерес до вивчення математики і її прикладних застосувань, встановити атмосферу співпраці на занятті;
- сприяти розвитку пізнавальної активності, пам'яті, мислення, уваги та уваги студентів засобами математичної науки.

Встановимо формулу об'єму конуса. А допоможуть нам у цьому знання з алгебри та одного з розділів математичного аналізу – інтегрального числення, стереометричні уявлення, і звичайно ж, логіка.

До дошки запрошуються студенти, які працювали над міні-проектом «Різні погляди на доведення формул об'ємів тіл», своїми відповідями вони будуть уособлювати знання математичних наук та логічні міркування.

Логіка: Конус має дуже багато спільного з пірамідою, але на відміну від піраміди, в основі конуса – не многокутник, а круг. Використаємо формулу об'єму піраміди $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H$ і підставимо замість площі основи її вираз - $S_{\text{осн.}} = \pi R^2$. Одержимо формулу об'єму конуса $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, де R – радіус основи конуса, H – його висота.



Стереометрія: Конус є тілом обертання, оскільки його можна отримати внаслідок обертання прямокутного трикутника навколо його катета, як осі.

Як відомо, об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими

$x = a$ та $x = b$ ($a < b$), обчислюється за формулою: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Для виведення формули об'єму прямого кругового конуса виберемо вісь відліку – пряму, що проходить у напрямку осі конуса. Початком відліку вважатимемо вершину конуса. Складемо рівняння прямої, що проходить у першій чверті в напрямку твірної конуса: $y = kx = \frac{R}{H} x$.

Настав час застосувати знання з інтегрального числення.

Інтегральне числення: Маємо визначений інтеграл $V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx$, який знайдемо безпосередньо, виконавши винесення спільного множника за дужки:

$$V = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Знаючи формулу об'єму конуса $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, виведемо формулу об'єму зрізаного конуса.

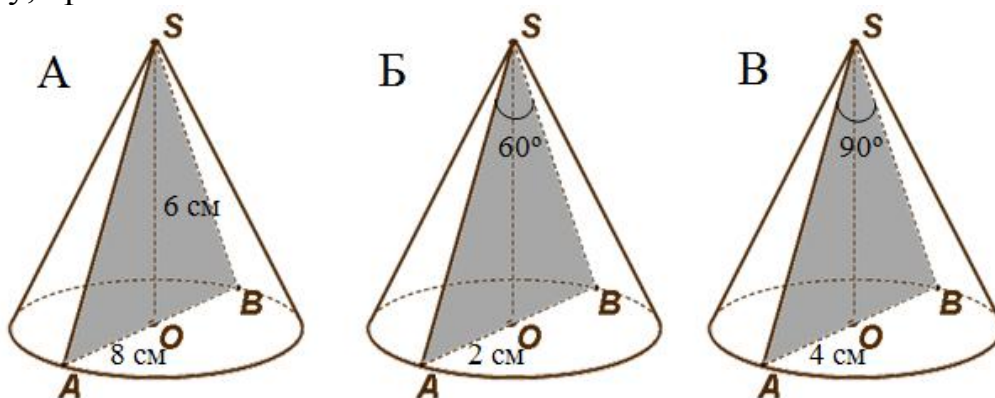
Логіка: І знову нам допоможе аналогія, цього разу – зі зрізаною пірамідою, об'єм якої ми знаємо: $V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, де h – висота зрізаної піраміди, S_1 , S_2 – площі її основ. Достатньо лише підставити замість площ многокутників S_1 та S_2 площі кругів – основ зрізаного конуса: $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$.

Підставивши S_1 та S_2 у формулу об'єму, одержимо:

$$V = \frac{1}{3} h(\pi R_1^2 + \sqrt{\pi R_1^2 \cdot \pi R_2^2} + \pi R_2^2) = \frac{1}{3} h(\pi R_1^2 + \pi R_1 R_2 + \pi R_2^2) = \frac{1}{3} \pi h(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2),$$

де R_1 , R_2 – радіуси основ зрізаного конуса, h – його висота.

Вправа 1. Складіть задачу на знаходження об'єму конуса, зображеного на малюнку, і розв'яжіть її.



Відповідь:

мал. А – $V = 128\pi \text{ см}^3$;

мал. Б – $V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$;

мал. В – $V = \frac{64\pi}{3} \text{ см}^3$

Вправа 2. Після збору врожаю фермер отримав дві конусоподібні купи зерна одного сорту, причому один конус вдвічі вищий за інший, а довжини кіл в основах конусів однакові. У скільки разів більше зерна насипано в першу купу?

Відповідь: у 2 рази

Вправа 3. Господар замовив транспорт для перевезення стогу сіна (густина сіна $0,03 \text{ г/см}^3$), яка має форму циліндра з конічним верхом. Радіус основи стогу становить $2,5 \text{ м}$, а висота – 4 м , причому циліндрична частина дорівнює $2,2 \text{ м}$. Яка маса сіна буде перевезена?

Відповідь: $1648,5 \text{ кг} \approx 1,65 \text{ т}$

Вправа 4. Молоко з відра висотою 30 см і діаметрами основ 22 см та 28 см потрібно перелити в каструлю, діаметр основи якої – 36 см . Знайдіть висоту підйому молока в каструлі.

Відповідь: $\approx 14,5 \text{ см}$.