

28.03.2023

Група 24

Математика (геометрія)

Урок 25-26

Тема: Піраміда

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Означення. Многогранник, одна грань якого — n -кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають **n -кутною пірамідою**.

Нагадаємо, що трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями піраміди, а саму спільну вершину — вершиною піраміди; n -кутник, про який ідеться в означенні,

називають основою піраміди, а його сторони — ребрами основи піраміди; ребра, які не належать основі, називають бічними ребрами піраміди (рис. 18.1).

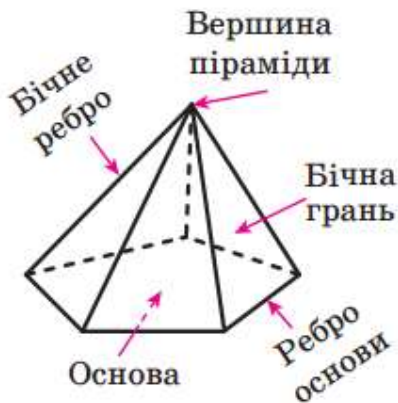


Рис. 18.1

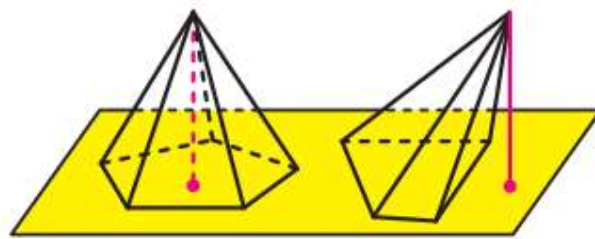


Рис. 18.2

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи (рис. 18.2).

Розглянемо опуклу n -кутну піраміду ($n > 3$). Переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основу піраміди по діагоналі (рис. 18.3). Такий переріз називають **діагональним перерізом піраміди**.

Діагональним перерізом піраміди є трикутник.

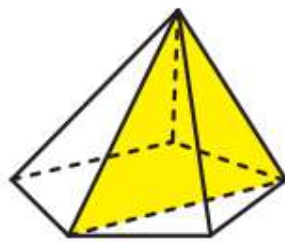


Рис. 18.3

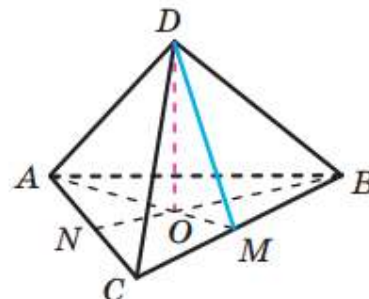


Рис. 18.4

Означення. Піраміду називають **правильною**, якщо її основа — правильний багатокутник і основа висоти піраміди є центром цього багатокутника.

На рисунку 18.4 зображено правильну трикутну піраміду $DABC$ з основою ABC . Трикутник ABC є рівностороннім. Проекцією вершини D на площину ABC є центр трикутника — точка O . Для знаходження цієї точки на рисунку 18.4 проведено медіани AM і BN трикутника ABC .

На рисунку 18.5 зображено правильну чотирикутну піраміду $EABCD$. Чотирикутник $ABCD$ є квадратом, точка O — його центр, відрізок EO — висота піраміди. Оскільки центр квадрата збігається з точкою перетину його діагоналей, то можна зробити такий висновок: проекція вершини правильної чотирикутної піраміди на площину основи — це точка перетину діагоналей квадрата, який є основою піраміди.

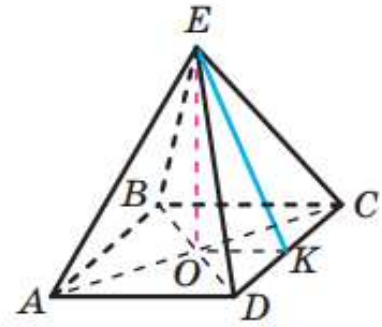


Рис. 18.5

Правильну трикутну піраміду, у якої всі грані рівні, називають **правильним тетраедром**.

Зазначимо деякі властивості правильної піраміди.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники (доведіть це самостійно).

Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

На рисунку 18.4 проведено відрізок DM , де точка M — середина ребра BC . Оскільки трикутник BCD — рівнобедрений з основою BC , то відрізок DM є його висотою. Отже, відрізок DM — апофема правильної трикутної піраміди $DABC$.

На рисунку 18.5 відрізок EK , де точка K — середина ребра DC , є апофемою правильної чотирикутної піраміди $EABCD$.

Усі апофемі правильної піраміди рівні.

18.1.° Скільки n -кутна піраміда має:

1) вершин; 2) граней; 3) ребер?

1) 1 вершину; 2) n граней; 3) $2n$ ребер.

18.5.° Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть висоту піраміди.

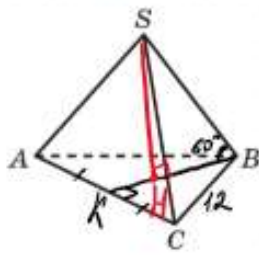


Рис. 18.8

Дано: $SABC$ - піраміда, $BC = 12$ см,
 $\angle SBK = 60^\circ$, SH - висота,
 $AB = BC = AC$, $SA = SC = SB$.
 Знайми: SH .

Розв'язання

Розм. $\triangle ABC$: $AB = BC = AC = 12$ см за
 в. рівностороннього трикутника.

BK - медіана, висота і бісектриса за в. рівностороннього трикутника.

$$\text{Тоді } CK = \frac{AC}{2}, CK = \frac{12}{2} = 6 \text{ (см).}$$

$\angle K = 90^\circ$, отже за теоремою Піфагора

$$BK^2 = BC^2 - CK^2$$

$$BK^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$$

$$BK = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$BH : HK = 2 : 1$ за властивістю медіани Δ .

Нехай $BH = 2x$ см, тоді $HK = x$ см.

$$BH + HK = 6\sqrt{3}, \text{ тоді } 2x + x = 6\sqrt{3}$$

$$3x = 6\sqrt{3}$$

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)} - HK$$

$$BH = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (см).}$$

$$\text{Розм. } \triangle SBH (\angle H = 90^\circ): \operatorname{tg} \angle B = \frac{SH}{BH}$$

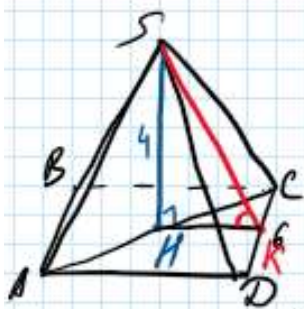
$$SH = BH \cdot \operatorname{tg} \angle B$$

$$SH = 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (см)}$$

Відповідь: $SH = 12$ см.

18.7.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — 4 см. Знайдіть:

- 1) апофему піраміди;
- 2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.



Дано: $SABCD$ - піраміда,
 SH - висота, $SH = 4$ см, $CD = AB = BC =$
 $= AD = 6$ см, SK - апофема.

Знайшли: SK , $\angle SKH$.

Розв'язання

1) Розм. $\square ABCD$: $HK = \frac{AD}{2}$ за вл. квадрата.

$$HK = \frac{6}{2} = 3 \text{ (см)}.$$

Розм. $\triangle SKH$ ($\angle H = 90^\circ$): за теор. Піфагора

$$SK^2 = HK^2 + SH^2$$

$$SK^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$SK = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

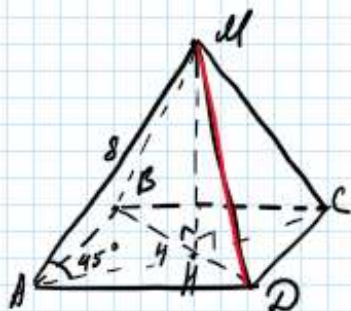
$$2) \sin \angle SKH = \frac{SH}{SK}$$

$$\sin \angle SKH = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\angle SKH = \arcsin 0,8$$

Відповідь: $SK = 5$ см, $\angle SKH = \arcsin 0,8$.

- 18.14. Основою піраміди $MABCD$ є паралелограм $ABCD$, діагональ BD якого дорівнює 4 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи, а бічне ребро MA , що дорівнює 8 см, утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть ребро MD .



Дано: $MABCD$ - піраміда,

$ABCD$ - паралелограм,

$BD = 4$ см, $\angle MAH = 45^\circ$,

$MA = 8$ см.

Знайшли: MD .

Розв'язання

$BH = HD = \frac{BD}{2}$ за вл. точки перетину діагоналей паралелограма.

$$BH = HD = \frac{4}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

Розм. $\triangle MAH$ ($\angle H = 90^\circ$): $\sin \angle A = \frac{MH}{MA}$

$$MH = MA \sin \angle A$$

$$MH = 8 \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Розм. $\triangle MDH$ ($\angle H = 90^\circ$): за теор. Піфагора

$$MD^2 = MH^2 + HD^2 \quad MD^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 16 \cdot 2 + 4 = 32 + 4 = 36$$

$$MD = \sqrt{36} = 6 \text{ (см)} \quad \text{Відповідь: } MD = 6 \text{ см}.$$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням
<https://forms.gle/N3k4593z95Ed8hRN9>.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com