

30.03.2023

Група 32

Математика (алгебра)

Урок 54-55

Тема: Повторення. Похідна, дослідження функції.

Матеріали до уроку:

Розв'язування прикладів на похідні не обходиться без таблиці похідних.

1. $(c)' = 0;$	13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
2. $(x)' = 1;$	14. $(\sin x)' = \cos x$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v';$	15. $(\cos x)' = -\sin x$
4. $(cu)' = cu';$	16. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5. $(uv)' = u'v + v'u;$	17. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	18. $(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$
7. $(\frac{c}{x})' = -\frac{c}{x^2}$	19. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x$
8. $(x^n)' = nx^{n-1}$	20. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	21. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(c^x)' = c^x \cdot \ln c; c > 0, c \neq 1$	22. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
11. $(e^x)' = e^x$	23. $(\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
12. $(\log_c x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_c e = \frac{1}{x \ln c}$	

24. $y=f(u(x)),$
 $y'=f'(u) \cdot u'_x$

Її завжди слід мати видрукованою під рукою і користуватися при обчисленнях як шпаргалкою.

Голова не смітник, і всього що вчать не запам'ятати, а от вміти користуватися формулами та правильно знаходити похідні може навчитися кожен школяр і студент. Перші дві формули прості, перша говорить, що похідна від сталої рівна 0, друга - похідна "ікса" рівна одиниці.

Далі йдуть формули похідних суми, добутку та частки, їх застосовують коли задану функцію можна подати у вигляді суми, добутку чи частки функцій.

Окремий урок ми приділимо похідній складеної функції (24), а поки що ознайомтеся з формулою як її знаходити

$$y = f(\varphi(x))$$
$$y' = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$$

Далі на поширених з практичних прикладах навчимо Вас користуватися усіма приведеними тут формулами.

Похідна суми, добутку та частки функцій

Приклад 1 Знайдіть похідну

$$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x.$$

Розв'язування: Використовуємо 2 та 8 формули та правила 3,4

$$\begin{aligned} y' &= (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' = \\ &= (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' = \\ &= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x)' = \\ &= 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7. \end{aligned}$$

Отримали похідну
 $y' = 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7$.

Приклад 2 Обчисліть похідну

$$y = \sqrt{3x}.$$

Розв'язування: Тут напряму формулу (9) не використаємо. Але можемо звести під формулу складеної функції.

Якщо $y = f(u(x))$, то похідна рівна $y' = f'_u \cdot u'_x$.

Для кореневої функції $y = \sqrt{3x}$ виконаємо заміну:

$$u = 3x, \text{ тоді } y = \sqrt{u}.$$

Тоді за формулою (9) похідна рівна

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{3x})' = (u = 3x)' = (\sqrt{u})' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{1}{2\sqrt{3x}} (3x)' = \frac{3}{2\sqrt{3x}} \end{aligned}$$

Приклад 3 Обчисліть похідну

$$y = 5^{3x} + 7^{2x}.$$

Розв'язування: Застосуємо десятю формулу для обчислення похідної показникової функції, тільки пам'ятаємо, що в степені не 1-ці, тому додатково домножуємо на похідну степеня $(3x)' = 3$, $(2x)' = 2$.

$$\begin{aligned} y' &= (5^{3x} + 7^{2x})' = 5^{3x} \cdot \ln 5 \cdot (3x)' + 7^{2x} \cdot \ln 7 \cdot (2x)' = \\ &= 3 \cdot 5^{3x} \cdot \ln 5 + 2 \cdot 7^{2x} \cdot \ln 7. \end{aligned}$$

Спершу важко читати та зрозуміти як знаходили похідну, але вивчивши формули та правила, все стає зрозумілим.

Приклад 4 Знайдіть похідну функції

$$y = (x^2 - 2x + 3)^5.$$

Розв'язування: На практиці ніхто з Вас не буде піднімати квадратний тричлен $x^2 - 2x + 3$ до 5 степеня, а тоді обчислювати похідну. За формулою складеної функції, перепозначимо:

$$y = u^5, \quad u = x^2 - 2x + 3.$$

Тоді похідна рівна

$$y' = (u^5)'_u (x^2 - 2x + 3)'_x = 5u^4 (2x - 1) = 10(x - 1)(x^2 - 2x + 3)^4$$

Простіше вже бути не може.

Перейдемо до вивчення **правила похідної добутку функцій**

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (5)$$

Приклад 5 Знайти похідну за правилом добутку функцій

$$y = (1 - x^3) \cdot (x^4 + 4x).$$

Розв'язування: На початках для простоти обчислень, можете виконувати заміни:

$$u = 1 - x^3, \quad v = x^4 + 4x, \quad \text{тоді } y = u \cdot v.$$

Далі за формулою похідної добутку функцій

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

обчислити похідні та підставити в праву сторону.

Спробуйте виконати так для кількох добутків функцій і Ви навчитеся обходитися без покрокового обчислення. Тоді Ваша відповідь прийде до наступного вигляду

$$\begin{aligned} y' &= [(1 - x^3)(x^4 + 4x)]' = \\ &= (1 - x^3)'(x^4 + 4x) + (x^4 + 4x)'(1 - x^3) = \\ &= -3x^2(x^4 + 4x) + (4x^3 + 4)(1 - x^3) = \\ &= -7x^6 - 12x^3 + 4. \end{aligned}$$

Спершу це важко зробити без помилок, але ми для того і вчимося, щоб вміти робити те, про що раніше не знали.

Приклад 6 Обчислити похідну функції

$$y = x^2 \cdot \ln(x+5).$$

Розв'язування: Застосуємо правило похідної добутку та формулу для логарифма (13). Перед переглядом відповіді можете самостійно знайти похідну, поклавши

$$y = u \cdot v, \quad u = x^2, \quad v = \ln(x+5) \text{ в формулу (5).}$$

Звірте чи отримали ту ж відповідь.

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' \cdot \ln(x+5) + x^2 \cdot (\ln(x+5))' = \\ &= 2x \cdot \ln(x+5) + x^2 \cdot 1/(x+5) \cdot (x+5)' = \\ &= 2x \cdot \ln(x+5) + x^2/(x+5). \end{aligned}$$

З формули слідує, що якщо при аргументу "x" немає множника, а лише стала як доданок, то похідну можна не брати, тобто

$$(x+5)' = 1,$$

а одиниця як множник "погоди" в похідну не вносить.

Познайомимося на кількох прикладах з формулою похідної частки функцій

$$y' = (u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2 \quad (11)$$

Приклад 7 Обчислити похідну функції

$$y = (1+x^2)/(1-x^2).$$

Розв'язування: За правилом похідної частки в чисельнику дістанемо

$$(1+x^2)' \cdot (1-x^2) + (1+x^2) \cdot (1-x^2)',$$

в знаменнику похідної буде квадрат знаменника заданої функції.

Після розписання похідних та групування подібних доданків, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)' - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{(1-x^2)2x - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

І так для всіх часток функцій, що Вам зустрічаються.

Приклад 8 Обчислити похідну функції

$$y = \cos(x)/(x^2+2x+3).$$

Розв'язування: Правило похідної частки дає наступний алгоритм обчислень.

В чисельнику похідної отримаємо

$$\cos(x) \cdot (x^2+2x+3)' + (\cos(x))' \cdot (x^2+2x+3),$$

в знаменнику квадрат знаменника, що заданий.

Знаходимо похідні та розписуємо

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos(x))' \cdot (x^2+2x+3) + \cos(x) \cdot (x^2+2x+3)'}{(x^2+2x+3)^2} = \\ &= \frac{-\sin(x) \cdot (x^2+2x+3) + \cos(x) \cdot (2x^2+2x)}{(x^2+2x+3)^2} = \\ &= \frac{2x \cos(x) \cdot (x+1) - \sin(x) \cdot (x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)^2} \end{aligned}$$

Додатково опрацювати:

<https://yukhym.com/uk/doslidzhennya-funktsiji/doslidzhennya-funktsiji-pobudova-grafika.html>