31.01.2023

Група 22

Математика (геометрія)

Урок 23-24

Тема: Паралелепіпед

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Означення. Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

На рисунку 17.1 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом.

Дві несусідні грані паралелепіпеда називають **протилежними гранями паралелепіпеда.** Наприклад, на рисунку 17.1 грані AA_1B_1B і DD_1C_1C є протилежними.

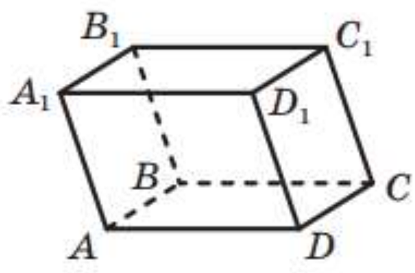


Рис. 17.1

Оскільки $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (рис. 17.1), то за ознакою паралельності площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Міркуючи аналогічно, можна довести, що *будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах*.

Паралелепіпед називають **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. У прямого паралелепіпеда всі бічні грані є прямокутниками, а основи — паралелограмами.

Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.

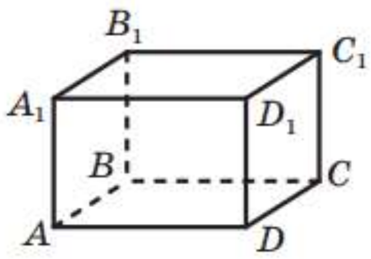


Рис. 17.2

На рисунку 17.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

Правильна чотирикутна призма є окремим видом прямокутного паралелепіпеда.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**. На рисунку 17.2 довжини ребер AB, AD і AA_1 є вимірами прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри рівні. Усі грані куба є квадратами.

Зв'язок між паралелепіпедами та їхніми окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 17.3.

Рис. 17.3

Теорема 17.1. ***Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.***

Доведення. Розглянемо діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.4).

Доведемо, що $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Оскільки трикутник ABC прямокутний ($\angle ABC = 90°$), то можна записати: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Оскільки $BC = AD$, то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \qquad (1)$$

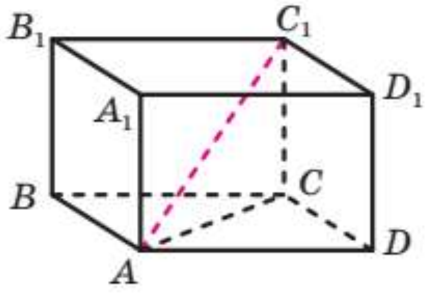


Рис. 17.4

Даний паралелепіпед є прямокутним, тому $C_1C \perp ABC$. Отже, трикутник ACC_1 прямокутний ($\angle ACC_1 = 90°$). Тоді $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Оскільки $CC_1 = AA_1$, то $AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2$.

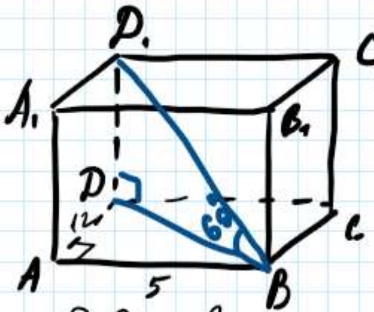
Ураховуючи рівність (1), можна записати:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Для решти трьох діагоналей доведення є аналогічними. ◄

З теореми 17.1 **випливає, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.**

17.3.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту паралелепіпеда.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - паралелепіпед, $AB = 5$ см, $BC = 12$ см, BD_1 - діагональ, $\angle DBD_1 = 60°$.

Знайти: DD_1.

Розв'язання

DD_1 - висота, оскільки $DD_1 = BB_1$, $DD_1 \perp (ABC)$.

З $\triangle ABD$ ($\angle A = 90°$): за теоремою Піфагора

$BD^2 = AD^2 + AB^2$

$BD^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

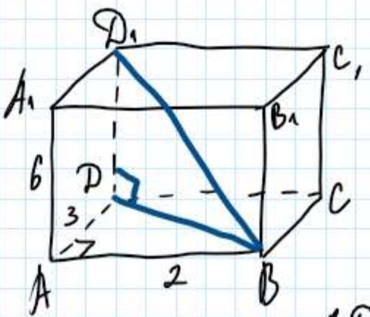
$BD = \sqrt{169} = 13$ (см).

З $\triangle BDD_1$ ($\angle D = 90°$): $DD_1 = tg\angle DBD_1 \cdot BD$

$DD_1 = tg60° \cdot 13 = \sqrt{3} \cdot 13 = 13\sqrt{3}$ см

Відповідь: $DD_1 = 13\sqrt{3}$ см.

17.5.° Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - паралелепіпед, $AB = 2$ см, $AD = 3$ см, $AA_1 = 6$ см.

Знайти: BD_1.

Розв'язання

З $\triangle ABD$ ($\angle D = 90°$): за теоремою Піфагора

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

$BD = \sqrt{13}$ (см)

З $\triangle BDD_1$ ($\angle D = 90°$): $DD_1 = AA_1 = 6$ см.

За теоремою Піфагора $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$

$BD_1^2 = (\sqrt{13})^2 + 6^2 = 13 + 36 = 49$

$BD_1 = \sqrt{49} = 7$ (см).

Відповідь: $BD_1 = 7$ см.

17.9.[•] Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.5), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:
1) між прямою DC_1 і площиною BCC_1;
2) між прямою B_1D і площиною ABB_1.

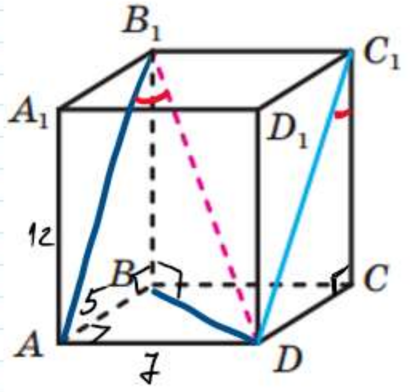


Рис. 17.5

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см.

Знайти: $\angle DC_1C$, $\angle AB_1D$.

Розв'язання

1) З $\triangle C_1CD$ ($\angle C = 90°$): $CD = AB = 5$ см, $CC_1 = AA_1 = 12$ см

$ctg \angle CC_1D = \frac{CC_1}{CD}$

$ctg \angle CC_1D = \frac{12}{5}$

$ctg \angle CC_1D = 2,4$

$\angle CC_1D = arcctg 2,4 \approx 23°$

2) З $\triangle AB_1B$ ($\angle B = 90°$): $BB_1 = AA_1 = 12$ см, за теоремою Піфагора $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$

$AB_1^2 = 5^2 + 12^2$

$AB_1^2 = 25 + 144 = 169$

$AB_1 = \sqrt{169} = 13$ (см)

З $\triangle ABD$ ($\angle A = 90^\circ$): за теоремою Піфагора

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$BD^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$$

$$BD = \sqrt{74} \text{ (см)}.$$

З $\triangle BDB_1$ ($\angle B = 90^\circ$): за теоремою Піфагора

$$B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2$$

$$B_1D^2 = (\sqrt{74})^2 + 12^2 = 74 + 144 = 218 \text{ (см)}$$

$$B_1D = \sqrt{218} \text{ (см)}.$$

З $\triangle ADB_1$: за теоремою косинусів

$$AD^2 = AB_1^2 + B_1D^2 - 2\,AB_1 \cdot B_1D \cdot \cos\angle B_1$$

$$2\,AB_1 \cdot B_1D \cdot \cos\angle B_1 = AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2$$

$$\cos\angle B_1 = \frac{AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2}{2\,AB_1 \cdot B_1D}$$

$$\cos\angle B_1 = \frac{13^2 + (\sqrt{218})^2 - 7^2}{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{218}} = \frac{169 + 218 - 49}{26\sqrt{218}} = \frac{\cancel{338}^{\,13}}{\cancel{26}\sqrt{218}} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{218}} \approx 0,8805$$

$\angle B_1 = \arccos 0,8805 \approx 28^\circ$. Відповідь: $\angle C_1 \approx 23^\circ$; $\angle B_1 \approx 28^\circ$.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/4xHerqaxL7EWUhVFA.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com