

24.01.2023

Група М-1

Урок 9-10

Тема: ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

Мета: ознайомлення з методами обробки результатів вимірювання

Організація процесу проведення вимірювань має велике значення для отримання достовірного результату, який залежить, перш за все, від кваліфікації спостерігача, його теоретичної та практичної підготовки, робочого стану засобів вимірювань (перевірка їх до початку вимірювального процесу), підготовки проб, а також обраної методики виконання вимірювань.

До виконання робіт з вимірювання спостерігач (дослідник) повинен відпрацювати послідовність процедур виконання вимірювань, вивчити інструкції з експлуатації засобів вимірювань, вимоги методик вимірювань. При виконанні вимірювань спостерігач (дослідник) повинен стежити за умовами проведення вимірювань і підтримувати їх в заданому режимі, дотримуватись правил техніки безпеки. Якщо в процесі вимірювань використовуються автоматизовані засоби вимірювання або вимірювальні інформаційні системи, то на початку робіт їх потрібно перевірити відповідним тестом, який дозволить переконатись в їхній працездатності.

Для отримання вірогідності результатів вимірювання потрібно враховувати зовнішні впливи метеорологічних параметрів (температура, вологість, атмосферний тиск тощо). Також необхідно вірно зіставити вимоги до точності результату вимірювання з витратами, пов'язаними з використанням засобів вимірювання, та до підготовки і проведення вимірювань. Незважаючи на уявну простоту виконання вимірювань, слід ретельно виконувати всі зауваження для зменшення впливу похибок на результат вимірювання.

Обробка результатів вимірювань полягає в обчисленні найвірогіднішого значення вимірюваної фізичної величини. Для аналізу величин, що мають

випадковий характер (випадкові похибки), обробка результатів вимірювання ґрунтується на методах теорії ймовірності і математичної статистики. Оскільки випадкова похибка є складовою частиною загальної похибки, до складу якої ще входить систематична складова похибок результатів вимірювань, то спочатку необхідно виявити й усунути систематичні похибки.

Способи виявлення і усунення систематичних похибок. Систематична складова похибки залишається постійною або закономірно змінюється за повторних вимірювань однієї й тієї ж фізичної величини, наприклад, постійна похибка через неправильне градування шкали відліку вимірювального приладу; похибка, що закономірно змінюється, наприклад, за рахунок розрядки елементів живлення приладу вимірювання тощо. Характеристику якості вимірювань, що відображує наближеність до нуля систематичної складової похибки вимірювання, називають правильністю вимірювання.

Усунути систематичні похибки можна за рахунок введення поправок ∇ , які чисельно дорівнюють значенню абсолютної систематичної похибки ΔX , але протилежні їй за знаком:

$$\nabla = - \Delta X$$

Поправка — це значення величини, що алгебраїчно додається до результату вимірювання для вилучення систематичної похибки.

Інструментальну систематичну похибку можна виявити перевіркою засобу вимірювання за допомогою зразкового, що має *вищу точність*. Значення абсолютної похибки ΔX вимірювального приладу обчислюють за виразом:

$$\Delta X = X_n - X_d$$

де X_n — показник приладу, що перевіряється; X_d — дійсне значення вимірювальної величини, що встановлене за допомогою зразкового вимірювального приладу, у якого клас точності має бути значно вищий за робочий.

Для різних точок (поділок) шкали приладу, що перевіряється, складають

таблицю поправок, за допомогою яких виключають інструментальні систематичні похибки.

Методичну систематичну похибку можна виявити, проаналізувавши допущення спрощень при визначенні залежностей непрямих вимірювань.

Наприклад, обчислюється площа кола за формулою зв'язку $S = \pi * r^2$, при цьому можна задатись значенням π від 3,14 до 3,1415926, що може викликати утворення систематичної похибки константи π , а це вплине на точність розрахунку. Також потрібно враховувати вплив засобу вимірювання на об'єкт дослідження. Наприклад, не врахування потужності, яку споживає засіб вимірювання при проведенні вимірювання.

Експериментальне виключення систематичних похибок - проводиться різними методами і способами: методом заміщення, способом компенсації, способом симетричних спостережень.

Метод заміщення полягає в тому, що вимірюваний об'єкт (невідому ФВ) замінюють відомою мірою, яка знаходиться в тих же самих умовах. Для цього спочатку потрібно виміряти невідому ФВ, в результаті чого дістати вираз:

$$X_H = X + \Delta C,$$

де X_H - показник приладу; X - значення невідомої величини; ΔC - систематична складова похибки.

Нічого не змінюючи у вимірювальному приладі, слід відтворити (відімкнути) замість X регульовану міру X_M і добрати таке її значення, за якого досягається попередній показник. В цьому разі:

$$X_H = X_M + \Delta C.$$

Порівнюючи два попередні вирази, дістанемо значення невідомої величини $X = X_M$, та обчислимо значення систематичної складової похибки: $\Delta C = X_H - X_M$.

Спосіб компенсації похибки за знаком дозволяє виключити відому за природою, але невідому за величиною систематичну похибку. Він

застосовується тоді, коли джерело похибки має направлену дію, і зміна напрямку на протилежний викликає зміну знаку, але не значення похибки. Зміну напрямку проводять парне число разів, при чому в половині випадків джерело похибок повинно викликати похибки одного знаку, а в другій половині - протилежного. Похибки виключаються при обчисленні середнього значення:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(x_d + \Delta C) + (x_d - \Delta C)}{2},$$

де \bar{x} - середнє арифметичне значення вимірюної величини; x_1, x_2 - результати вимірювань; x_d - дійсне значення вимірюної величини.

Таким чином можна компенсувати вплив зовнішнього рівномірного поля Землі, повертаючи вимірювальний прилад на 180° .

Спосіб симетричних спостережень використовують для виключення прогресуючого впливу будь-якого фактору, який є лінійною функцією часу (поступове прогрівання приладів, падіння напруги живлення тощо). Спосіб симетричного спостереження полягає в тому, що за певний інтервал часу виконують декілька вимірювань величини постійного розміру. За кінцевий результат приймають напівсуму окремих результатів, симетричних в часі відносно середини інтервалу Наприклад, було проведено п'ять вимірювань з моменту t_1 , тоді похибка мала значення Δt (див. рис. 1); очевидно, що:

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_5}{2} = \frac{\Delta_2 + \Delta_4}{2} = \Delta_3$$

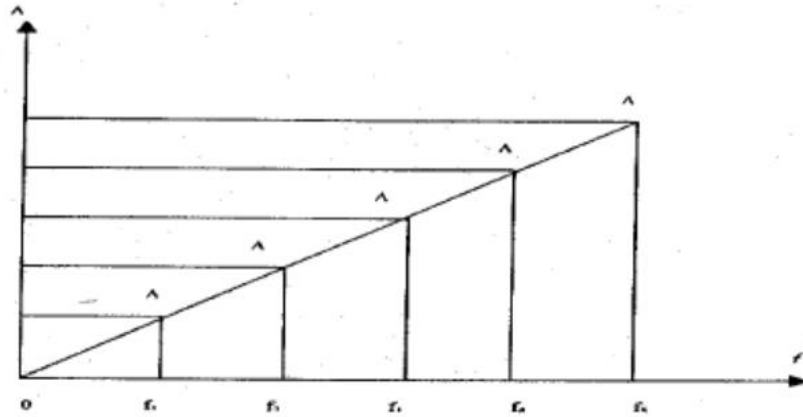


Рис 1. Схема способу симетричних спостережень

Рекомендується застосовувати цей спосіб в разі, коли не очевидна наявність прогресивної систематичної похибки.

Визначення границь не виключених залишків систематичної похибки. Результати вимірювань, з яких виключено розглянуті систематичні похибки, називають *виправленими*. Однак виявити всі систематичні похибки неможливо. Навіть після виключення інструментальних, особистих та методичних похибок у результатах вимірювань знаходять місце так звані залишки систематичних похибок. Виявити їх можливо на підставі аналізу умов проведення експерименту. Якщо відомо, що похибка результату вимірювання визначається рядом залишків не виключених систематичних похибок, кожна з яких має свою певну ймовірність, то при невідомих законах розподілу їх границі сумарної похибки (Θ) обчислюють за формулою:

$$\Theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2},$$

де: m - число не виключених похибок; Θ - межа i -ої не виключеної систематичної похибки; k - коефіцієнт, який дорівнює 1,10 при ймовірності $P=0,95$.

Врахування граничної похибки.

Гранична похибка ϵ визначається за формулою:

$$\varepsilon = t_S \sigma_x = t_S S_x$$

Коефіцієнт t_S є функцією вимірювань n та довірчої ймовірності P ($t_S = f(n, P)$) і визначається за таблицею розподілу Ст'юдента. Таким чином, довірчі межі, де із заданою довірчою ймовірністю знаходиться істинне значення виміряної величини X :

$$x - \varepsilon < X \leq x + \varepsilon$$

Як бачимо, результат вимірювання знаходиться у певних межах $\pm \varepsilon$, і кількість вимірювань - множина. Межі відхилень дисперсії δ_x та середнього квадратичного відхилення S_x (при необхідності в деяких випадках) можна уточнити за допомогою χ^2 - розподілу Пірсона:

$$\chi_f^2 = \chi_{n-1}^2 = \frac{(N-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$$

При проведенні великої кількості вимірювань середнє квадратичне відхилення S_x мало відрізняється від значення σ_x . Ця відмінність тим менша, чим більше n . Якщо кількість вимірювань невелика, то S_x значно відрізняється від σ_x .

Диференціальна функція цього розподілу описується за формулою:

$$P_{\chi^2 f}(\xi) = \frac{1}{\left(\frac{f-1}{2}\right) \div 2^{\frac{f}{2}}} (\xi)^{\frac{f}{2}-1} * e^{-\frac{1}{2}\xi},$$

де $f = n - 1$ - кількість степенів свободи; ξ - інтервал чисел (1, 2, 3...).

Значення a_x середнього квадратичного відхилення результатів вимірювань лежать в інтервалі (5 ; 5), межі якого визначаються за формулами:

$$S_{x1} = \frac{\sqrt{n-1}S_x}{\chi_{f; \frac{g}{2}}}; \quad S_{x2} = \frac{\sqrt{n-1}S_x}{\chi_{f; 1-\frac{g}{2}}},$$

де g – мінімальна ймовірність, яка знаходиться в межах $0,003 - 0,1$ для вимірювань з ймовірністю $0,9...0,997$.

У технічних вимірюваннях (як лабораторних, так і виробничих) обчислення виконується з ймовірністю $P=0,95$; в окремих випадках, коли експеримент неможливо повторити, приймають $P=0,99$. Тільки в особливих випадках, якщо результати експерименту впливають на життя і здоров'я людей, слід брати $P=0,997$.

При вимірюванні та контролі параметрів навколишнього середовища використовують фізичні, фізико-хімічні, біологічні, радіохімічні методи тощо. Як свідчить практика, для їх вимірювання можна обмежитись 20-30 вимірюваннями відповідного параметру. Для обробки результатів вимірювань доцільніше за все використовувати критерії розподілу Ст'юдента.

Графоаналітичний метод перевірки належності сукупності результатів вимірювання до нормального закону розподілу. Оскільки методи обробки результатів вимірювань ґрунтуються на використанні нормального розподілу, перед початком визначення довірчих меж, де з довірчою ймовірністю знаходиться істинне значення вимірюваної величини X , бажано переконатись в тому, що дана сукупність відповідає згаданому закону.

Для вибірок з $n > 10$ обробку результатів експерименту можна здійснювати за так званим складним критерієм, який описаний у ГОСТ 8.201-76. Для порівняно невеликих сукупностей цю перевірку можна здійснити графоаналітичним методом. Для даної вибірки за певними правилами слід побудувати графік емпіричного розподілу, і якщо точки цього графіку розташуються приблизно на прямій лінії, то дана сукупність значень вимірювання відповідає нормальному закону розподілу.

Для побудови графіка слід побудувати ранжований ряд, розмістивши

значення x_i в порядку зростання. Якщо деякі значення в такому варіаційному ряду повторюються, то в робочу таблицю їх записують лише один раз, але вказують кількість цих значень (частота m_i ; даної варіанти x_i ряду). В наступній графі записують зростаючим підсумком так звані накопичені частоти M_i (сумарна кількість значень m_i від початку до x_i включно), після чого обчислюють інтеграл Лапласа:

$$\Phi(z_i) = \frac{M_i}{n+1} - 0,5 \cdot$$

Слід визначити значення z_i , а потім побудувати графік $z_i = f(x_i)$.

Якщо графік цієї функції приблизно прямолінійний, то можна вважати, що дана вибірка не суперечить нормальному закону розподілу.

Виявлення та виключення грубих похибок

Наявність грубих похибок істотно спотворює як результат вимірювання, так і його довірчі межі. Ось чому вимірювання, передусім, повинні бути організовані таким чином, щоб можливість появи грубих похибок була зведена до мінімуму. Необхідно об'єктивно оцінити, чи містить дане вимірювання грубу похибку, чи його відхилення є результатом випадкового, але цілком закономірного явища. Однак не можна інтуїтивно відкидати сумнівні результати спостережень, навіть якщо хоча б один з них суттєво відрізняється від інших.

Для виявлення грубих похибок результатів вимірювання існує декілька критеріїв, таких як: ***критерій Q***, ***Романовського***, ***критерій 3S***, ***критерій V*** та інші.

Для визначення грубих похибок при невеликому числі вимірювань $n < 10$ може бути використано ***критерій Q*** (цей критерій переважно використовують при обробці результатів хімічних та біологічних досліджень).

Критерій Романовського дозволяє визначити грубі похибки (при $n \rightarrow \infty$) і використовується для обробки результатів вимірювань практично усіх поширених методів вимірювання.

Критерій 3 S базується на порівнянні ($X_i - \bar{X}$) з потрібним середньо

квадратичним відхиленням окремих результатів спостереження. Використання цього критерію обмежено через його наближену оцінку грубої похибки.

Критерій виявлення грубих похибок (V) практично подібний до критерію Романовського. Розглянемо більш поширені **критерії Q та Романовського**.

Критерій Q використовується, як зазначалось раніше, при невеликому числі вимірювань:

$$Q = \frac{x_1 - x_2}{x_{\max} - x_{\min}},$$

де: x_1 – підозріло відокремлене (сумнівне) значення члену вибірки;
 x_2 – сусіднє з ним значення у ранжированому ряду; x_{\max} - x_{\min} – різниця між максимальним і мінімальним значенням членів вибірки у ранжированому ряду.

Обраховану величину Q порівнюють з $Q_{\text{табл}}$ - табличним значенням критерію при даних прийнятій ймовірності P і числі ступенів вільності f (табл.1):

Таблиця 1

Числові значення $Q_{\text{табл}}$

f	P			f	P		
	0,9	0,95	0,99		0,9	0,95	0,99
2	0,89	0,94	0,99	6	0,43	0,52	0,64
3	0,68	0,77	0,89	7	0,40	0,48	0,58
4	0,58	0,64	0,76	8	0,37	0,46	0,53
5	0,48	0,56	0,70	9	0,34	0,44	0,48

При аналітичних дослідженнях хімічних та біологічних напрямків $P = 0,95$. Число ступенів визначають за формулою: $f = n - 1$, де n - кількість вимірювань (визначень).

Якщо $Q > Q_{\text{табл}}$, то даний результат містить грубу похибку і його слід виключити з розрахунку середнього арифметичного вимірюваної величини.

Критерій Романовського. Нехай проведено ряд вимірювань, до того ж n вимірювань не викликають сумнів, а $n+1$ викликає сумнів (суттєво

відрізняється від інших). Слід зробити перевірку того, що результат $n+1$ при вимірюваннях містить грубу похибку:

- ♦ визначається середнє арифметичне значення для ряду вимірювань від x_1 до x_n ;
- ♦ наближене значення середнього квадратичного відхилення результату вимірювання;
- ♦ критерієм того, що x_{n+1} містить грубу похибку, є нерівність:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| > hS_x,$$

де значення величини h визначається за кількістю вимірювань n та ймовірністю P ($p = 1 - P$). Обрання величини P здійснюється в залежності від конкретних вимог до результатів експерименту.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Задача. За результатами вибіркового обстеження 10 сімей підприємств харчової промисловості отримані середні рівні місячної заробітної плати, яка припадає на одного члена сім'ї, грн.: 100, 106, 85, 94, 88, 102, 120, 60, 95, 90.

Спираючись на дані вибірки, необхідно перевірити припущення, що середній розмір зарплати, який припадає на одного члена сім'ї працівників харчової промисловості (генеральна сукупність), дорівнюватиме 85 грн. (x^0).

РІШЕННЯ:

Грунтуючись на припущенні про нормальний характер розподілу досліджуваної ознаки в генеральній сукупності, виконуємо розрахунки:

обчислюємо параметри $\bar{x} = 94$; $s = 14,9$.

Прийнявши $x^0 = 85$, визначаємо числове значення нормованого $1,91$ відхилення. Знаходимо за стандартною таблицею ймовірність для $1,9$ і числа ступенів вільності. Для таких параметрів розрахункове значення ймовірності $P = 0,955$. Таким чином, для числового значення величини нормованого відхилення $X = 1,91$ ймовірність $P = 0,955$. Тобто, ймовірність появи значення X , більшим, ніж одержане при вибірці, буде $1 - 0,955 = 0,045$, або приблизно один випадок з 20. Ймовірність появи, яке по абсолютною величиною буде більше спостережуваного значення, становитиме $=0,090$, тобто приблизно один випадок з 10. Таке значення X слід визнати неістотним. Тому різниця між вибірковою і генеральною середньою не буде перевищувати 9 грн. (94-85).

Якщо визнати вибіркоче значення істотним, а таке припущення можна висунути, оскільки спостережуване значення X мало ймовірне, то початкове припущення, зумовлене обчисленням значення X , буде невірним. Подібне міркування приводить до висновку про те, що середній розмір зарплати у розрахунку на одного члена сім'ї працівників досліджуваної галузі 85 грн. Є сумнівним, а різниця між генеральною ($x^0 = 85$) і вибірковою ($x^0 = 94$) середньою легко могла перевищити 9 гривень.